ZAD 1.

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2\sqrt{3}=(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{3}=6-2\sqrt{12}+2-2\sqrt{3}=$

stosujemy wzór skr. mn. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=8-2\sqrt{4\cdot3}-2\sqrt{3}=8-2\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}=8-2\cdot2\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}=$

$=8-4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=8-6\sqrt{3}$

Odp. A.

ZAD 2.

$2\log_5 4-3\log_5\frac{1}{2}=\log_5 4^2-\log_5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\log_5 16-\log_5\frac{1}{8}=$

$=\log_5\frac{16}{\frac{1}{8}}=\log_5 128=\log_5 2^7=7\log_5 2$

Odp. B

ZAD 3.

$140\% - 106{,}40$

$100\% - x$

$x=\frac{100\%\cdot106{,}40}{140\%}=\frac{10640}{140}=76$ zł.

Odp. C

ZAD 4

$\left(\sqrt[2]{6}\cdot\sqrt[4]{6}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(6^{\frac{1}{2}}\cdot6^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(6^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{4}}=6^{0,25}$

Odp. B

ZAD 5

Podstawiamy do pierwszego równania $x=1,\ y=-3$

$1+3=a^2$

$4=a^2$

$a_1=2$

$a_2=-2$

Podstawiamy do drugiego

$(1+a)\cdot1-3(-3)=-4a$

$1+a+9=-4a$

$10=-5a \quad /:(-5)$

$\underline{-2=a}$

Odpowiedź 2 odrzucamy bo nie spełnia drugiego równania

Odp. B

ZAD6

Trzeba najpierw rozwiązać równanie

$2(x-4)(x^2-1)=0$

$2(x-4)(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-4=0 \lor x-1=0 \lor x+1=0$

$x_1=4 \lor x_2=1 \lor x_3=-1$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3 = 4\cdot 1\cdot(-1) = -4$

Odp. B

ZAD 7

$\frac{12-5x}{2} < 3(1-\frac{1}{2}x)+7x \quad /\cdot 2$

$12-5x < 6-\frac{6}{2}x+14x$

$12-5x < 6-3x+14x$

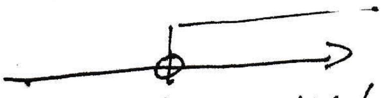
$-5x+3x-14x < 6-12$

$3x-19x < -6$

$-16x < -6 \quad /:(-16)$

$x > \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{16}_{8}}$

$x > \frac{3}{8}$



$\frac{3}{8}$ $x\in(\frac{3}{8},+\infty)$

Odp. D.

ZAD 8

$f(x) = \underbrace{(a-1)}x+3$

Jeśli to $=3$ to to musi być równe 0 czyli $a-1=0$

czyli $a=1$

Odp. C

ZAD 9.

A – fałsz ponieważ $D=(-3,5\rangle$

$x_0=4$

B – fałsz ponieważ funkcja ma jedno miejsce zerowe

C – fałsz ponieważ $f(1)=2$

D – prawda

Odp. D

ZAD 10.

$f(x) = \frac{8x-7}{2x^2+1}$ podstawiamy za $x = 1$

$f(1) = \frac{8-7}{2+1} = \frac{1}{3}$

Odp. B

ZAD 11

(x, y, z) – ciąg geometryczny

$x \cdot y \cdot z = 64$

$x = x$

$y = x \cdot q$

$z = x \cdot q^2$

$x \cdot x \cdot q \cdot x \cdot q^2 = x^3 q^3 = 64$

$(x \cdot q)^3 = 64$

$y^3 = 64$

$\underline{y = 4}$

Odp. C.

ZAD. 12

(a_n) – ciąg arytmetyczny

$r = 5$

$a_1 = (-3)$

$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 + 3r}{a_1 + r} = \frac{-3 + 3 \cdot 5}{-3 + 5} = \frac{-3 + 15}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Odp. C

ZAD. 13

$\sphericalangle CAO = 70° \rightarrow \sphericalangle ACO = 70° \rightarrow \sphericalangle AOC = 180 - 2 \cdot 70° = 180° - 140° = \underbrace{}_{}40°$

$\sphericalangle AOC$ – jest kątem środkowym

$\sphericalangle ABC$ – jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku.

$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC$ czyli $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} 40° = 20°$

Odp. A.

ZAD 14

$a_n = 6n^2 - n^3$

$b_n = 2n + 13$

$c_n = 2^n$

Dla a_n:

$a_1 = 6 \cdot 1^2 - 1^3 = 6 - 1 = 5$

$a_2 = 6 \cdot 2^2 - 2^3 = 6 \cdot 4 - 8 = 16$

$a_3 = 6 \cdot 3^2 - 3^3 = 6 \cdot 9 - 27 = 36$

$16 - 5 \quad 36 - 16$

$11 \neq 20$

a_n nie jest c. ar.

Dla b_n

$b_1 = 2 \cdot 1 + 13 = 15$

$b_2 = 2 \cdot 2 + 13 = 17$

$b_3 = 2 \cdot 3 + 13 = 19$

$17 - 15 \quad 19 - 17$

$2 = 2$

Odp. B

ZAD 15

$a_n = (-2)^n \cdot n + 1 \quad n \geq 1$

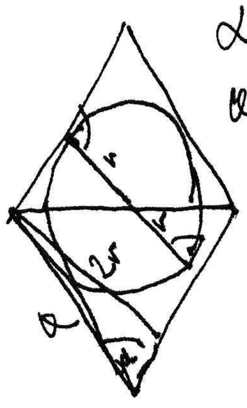
$a_3 = (-2)^3 \cdot 3 + 1$

$a_3 = -8 \cdot 3 + 1$

$a_3 = -24 + 1 = -23$

Odp. D

ZAD 16



$\alpha = 60°$

$a = 2\sqrt{3}$

$\sin 60° = \frac{2r}{2\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{2\sqrt{3}}$

$r = \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3}{2}$

Odp. D

ZAD 17

Wysokości przecinają się w tr. równobocznym w stos. 2:1
Niech Δ DEC ma wys. h a Δ ABC ma wysokość H

Z tw. Talesa wynika że

$P(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot H$ $\qquad h = \frac{2}{3} H$

$P(DEC) = \frac{1}{2} DE \cdot h$ $\qquad DE = \frac{2}{3} AB$

$$\frac{P(ABC)}{P(DEC)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{AB \cdot H}}{\cancel{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} AB \cdot \frac{2}{3} H} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$ czyli 9:4

Odp. A

ZAD 18

$P = (4,7)$
$R = (-2,-3)$
środek odcinka PR. $S = \left(\frac{4-2}{2}, \frac{7-3}{2}\right) = (1,2)$

$T = (3,-1)$
$|ST| = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Odp. B

ZAD 19

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ obliczyć $\cos\alpha$

Korzystamy ze wzoru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

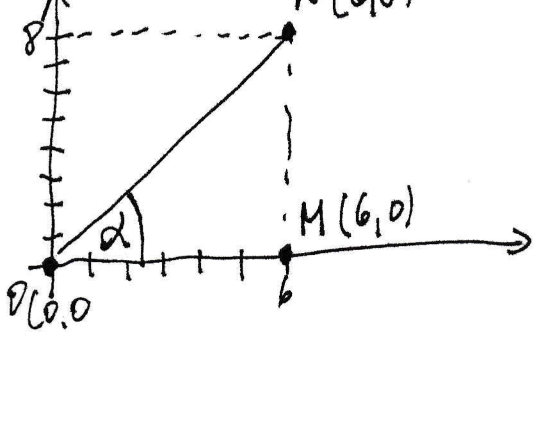
$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

Ze względu na to, że w I ćwiartce są same plusy $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

Odp. D

ZAD 20



$$tg\alpha = \frac{|MN|}{|OM|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Odp. A

ZAD 21

$$y = 3ax - 2 \qquad y = 2x + 3a \qquad \perp$$

$m_1 = 3a$

$m_2 = 2$

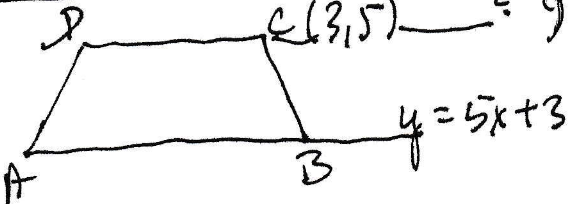
$m_2 = -\frac{1}{m_1}$ $\quad 2 = -\frac{1}{3a} \;/\cdot 3a$

$6a = -1 \;/:6$

$a = -\frac{1}{6}$

Odp. B.

ZAD 22



? $y = ax + b$

Proste te są || więc wsp. kier. są równe zatem $a = 5$

Punkt $(3,5)$ spełnia równanie prostej $y = ax + b$ więc

$5 = 5 \cdot 3 + b$

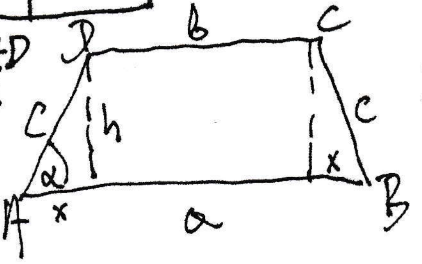
Zatem $5 = 15 + b$

$b = 5 - 15 = -10$

prosta więc ma postać $y = 5x - 10$

Odp. C

ZAD 23



$\alpha = 30^\circ$

$x = \frac{a-b}{2}$

$\frac{h}{x} = \operatorname{tg}\alpha \;/\cdot x$

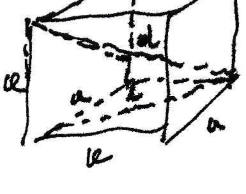
$h = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$

$h = \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$

$h = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a-b}{6}\sqrt{3}$

Odp. B.

ZAD 24.



$d = 5\sqrt{3}$

$V = ?$

$a^2 + a^2 = b^2$

$b^2 = 2a^2$

$b^2 + a^2 = d^2$

$d^2 = 2a^2 + a^2$

$d^2 = 3a^2 \;/:3$

$a^2 = \frac{d^2}{3} \quad a = \frac{d}{\sqrt{3}} \quad a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$

$V = a^3$

$V = \left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\cancel{3}d^3\sqrt{3}}{\cancel{3}\cdot 3^2} =$

$= d^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}$

$V = (5\sqrt{3})^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} = 125 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} =$

$= 1 \cdot 125 = 125$

Odp. A.

ZAD 25

O_1 $\quad A = 3a$

$$V_1 = \frac{hA^2\sqrt{3}}{12}$$

O_2

$$V_2 = \frac{ha^2\sqrt{3}}{12}$$

Pole △ równobocznego:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

~~Pole~~ Objętość ostrosłupa $\cancel{V} = \frac{1}{3}\cdot h\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{h\cdot 9a^2\sqrt{3}}{12}}{\frac{ha^2\sqrt{3}}{12}} = \frac{\cancel{h}\cdot 9\cdot \cancel{a^2\sqrt{3}}}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{12}}{\cancel{ha^2\sqrt{3}}} = 9 = \frac{9}{1} \qquad 9:1$$

Odp. C

ZAD 26

$$\boxed{1}\cdot\boxed{9}\cdot\boxed{5} + \boxed{8}\cdot\boxed{1}\cdot\boxed{5} = 45 + 40 = 85$$

cyfra 7 | 10 cyfr bez 7 czyli 9 | 5 cyfr parzystych

8 cyfr bez zera i 7 | cyfra 7 | 5 cyfr parzystych

Odp A

ZAD 27

liczba liczb naturalnych dwucyfrowych $\boxed{9}\cdot\boxed{10} = 90 = n$

liczba liczb nat. dwucyfr. podzielnych /5 $\boxed{9}\cdot\boxed{2} = 18 = k$

$$P(A) = \frac{k}{n} \qquad P(A) = \frac{18}{90} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{9}}{\cancel{9}\cdot 2\cdot 5} = \frac{1}{5}$$

Odp. D

ZAD. 28

Ustawiamy liczby w kolejności rosnącej

$$1,\ 1+x,\ 1+2x,\ 4+3x$$

Ilość liczb jest parzysta więc mediana jest średnią arytmetyczną liczb środkowych

$$Med = \frac{1+x+1+2x}{2} = 10$$

$$\frac{2+3x}{2} = 10 \quad /\cdot 2$$

$$2+3x = 20$$

$$3x = 18 \quad /:3$$

$$\underline{\underline{x = 6}}$$

Odp. A.

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$3x(x+1) > x^2 + x + 24$$

$3x^2 + 3x > x^2 + x + 24$

$3x^2 + 3x - x^2 - x - 24 > 0$

$2x^2 + 2x - 24 > 0 \quad /:2$

$x^2 + x - 12 > 0$

$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48$

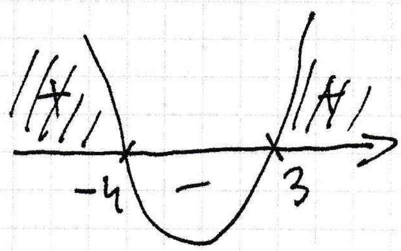
$\Delta = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$

$a > 0 \quad \Delta > 0$



$x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

Odpowiedź: ....

ZAD 30

Rozwiąż równanie

$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x+2$$

$$\frac{6x-1}{3x-2} - \frac{3x+2}{1} = 0$$

$$\frac{6x-1-(3x+2)(3x-2)}{3x-2} = 0$$

$$\frac{6x-1-(9x^2-4)}{3x-2} = 0$$

$$\frac{6x-1-9x^2+4}{3x-2} = 0$$

$$\frac{-9x^2+6x+3}{3x-2} = 0 \Leftrightarrow 3x-2 \neq 0 \wedge -9x^2+6x+3=0 \quad /:(-3)$$

$3x \neq 2$

$x \neq \frac{2}{3}$

Dziedzina równania

$3x^2-2x-1=0$

$a=3 \quad b=-2 \quad c=-1$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)$

$\Delta = 4+12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

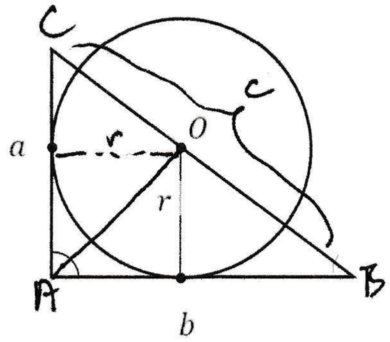
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{2-4}{2\cdot 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości a i b. Punkt O leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta i jest środkiem okręgu stycznego do przyprostokątnych tego trójkąta (zobacz rysunek).

Wykaż, że promień r tego okręgu jest równy $\frac{ab}{a+b}$.



Dzielimy trójkąt ΔABC na dwa ΔABO i ΔACO

$$P(\Delta ABC) = P(\Delta ABO) + P(\Delta ACO)$$

$$\frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} b \cdot r + \frac{1}{2} a \cdot r$$

$$\frac{1}{2} a \cdot b = r \frac{1}{2}(a+b) \quad / : \frac{1}{2}$$

$$a \cdot b = r(a+b) \quad / : (a+b)$$

$$r = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

Zadanie 32. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha$.

$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ Podnosimy stronami do kwadratu

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25}$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = \frac{49}{25}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{25} - \frac{25}{25}$

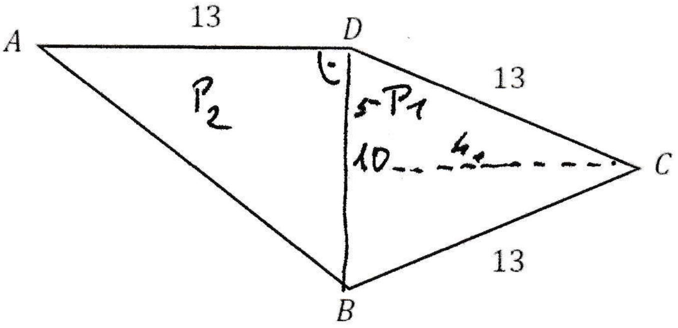
$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	31.	32.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 33. (0–2)

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |AD| = 13$ (zobacz rysunek). Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10 i jest prostopadła do boku AD. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



Dzielimy czworokąt na dwa trójkąty, obliczamy P_1 i P_2 a stąd $P = P_1 + P_2$

P_1: $5^2 + h_1^2 = 13^2$

$h_1^2 = 169 - 25$

$h_1^2 = 144$

$\underline{h_1 = 12}$

$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$

P_2: $P_2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 13 = 65$

$P = P_1 + P_2 = 60 + 65 = 125$

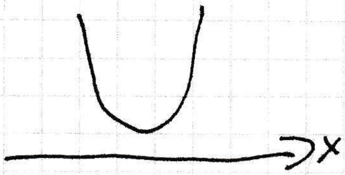
Odpowiedź: ....

Zadanie 34. (0–2)

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że $1 + c > b$.

$a > 0$ ponieważ $a = 1$

funkcja wygląda tak



czyli jest dodatnia dla każdej liczby rzecz. x

Przyjmijmy, że $x = -1$

$$(-1)^2 + b \cdot (-1) + c > 0$$

$$1 + c - b > 0$$

$$1 + c > b$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	33.	34
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 35. (0–5)

Rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa 10. Wyrazy a_3, a_5, a_{13} tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_1 + 3r$

$a_5 = a_1 + 4r$

Cp. $10 = 5a_1 + 10r \quad /:5$

$2 = a_1 + 2r = a_3$

$a_1 = 2 - 2r$

$a_{13} = a_1 + 12r$

$a_5 = \sqrt{a_3 \cdot a_{13}}$

$(a_1 + 4r) = \sqrt{(a_1+12r)(a_1+2r)}$

$\cancel{(a_1+4r)^2 = 2a_1 + 24r}$

$\cancel{a_1^2 + 8a_1r + 16r^2 = 2a_1}$

$\cancel{a_1^2} + 8a_1r + 16r^2 = \cancel{a_1^2} + 2a_1r + 12a_1r + 24r^2$

$8a_1r - 14a_1r = 24r^2 - 16r^2$

$-6a_1r = 8r^2$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{8r^{\cancel{2}}}{-6\cancel{r}} = -\dfrac{4}{3}r \\ a_1 = 2 - 2r \end{cases}$$

$-\frac{4}{3}r = 2 - 2r \quad /\cdot(-3)$

$4r = -6 + 6r$

$6 = 2r$

$r = 3$

$a_1 = 2 - 2\cdot 3$

$a_1 = 2 - 6$

$a_1 = -4$

$a_n = -4 + (n-1)\cdot 3$

$a_n = -4 + 3n - 3$

$a_n = -7 + 3n$

$a_n = 3n - 7$