5.5. Funkcje wykładnicze

5.5.1. Narysuj wykres funkcji $y = 2^{x+1}$. W jakim punkcie wykres ten przecina oś OY?

5.5.2. Dla jakich m wykres funkcji $y = -(0{,}5)^x + m$ jest położony poniżej prostej $y = -1$?

5.5.3. Naszkicuj wykresy funkcji. Które z nich są rosnące?

a) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; b) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$; c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$; d) $y = -\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$.

5.5.4. W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji $y = 2^x$ i $y = -x^2 + 4$. Ile punktów przecięcia mają oba wykresy?

5.5.5. Narysuj wykres funkcji $y = -2^x + 3$. Jaki jest zbiór wartości tej funkcji?

5.5.6. Narysuj wykres funkcji $y = 2^{x-2} - 4$. Dla jakich x funkcja przyjmuje wartości ujemne?

5.5.7. Narysuj wykres funkcji $y = -3^{x+1} + 3$. Dla jakich x funkcja przyjmuje wartości większe od 2?

5.5.8. Masę leku pozostałą w organizmie po upływie x godzin można obliczyć, korzystając ze wzoru $M_x = 64 \cdot a^x$. Nerki usuwają z krwi 50% leku po 4 godzinach. Wyznacz a i opisz M_x wzorem.

5.5.9. Okres połowicznego rozpadu izotopu jodu wynosi 8 dni. Początkowa masa próbki tego pierwiastka wynosiła 64 g ($t = 0$). Funkcja opisująca masę próbki po upływie t dni dana jest wzorem $f(t) = 64 \cdot 2^{\frac{-1}{8}t}$. Narysuj wykres funkcji dla $0 \le t \le 48$. Jaka ilość pierwiastka zostanie po 24 dniach?

5.5.10. Przewidywana roczna inflacja na najbliższe 10 lat w królestwie Krymtatarii kształtuje się na poziomie 10%. Złota kula obecnie ma tam cenę $C_0 = 4800$ walorów. Przewidywana cena detalu po t latach może być opisana równaniem $C(t) = C_0 \cdot 1{,}1^t$. Jaka będzie przewidywana cena złotej kuli za 5 lat?

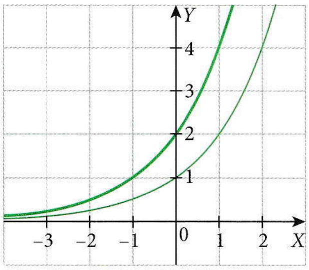
5.5.11. $K(t) = 10\,000 \cdot a^{4t}$ oznacza wielkość kultury bakterii w zależności od czasu t wyrażonego w godzinach. Jak duża będzie kultura bakterii po 8 godzinach, jeżeli po 1 godzinie zawierała 160 000 bakterii?

5.5.12. Masę M pewnej substancji radioaktywnej (w gramach) po upływie czasu t (w sekundach) można określić za pomocą funkcji $M(t) = 375 \cdot e^{-t}$. Ile gramów substancji zostanie po 4 sekundach? Przyjmij $e = 2{,}7$.

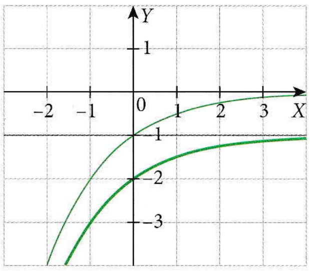
5.5.13. Oszacowano, że telefon komórkowy traci na wartości około 35% rocznie. Wartość telefonu komórkowego po t latach użytkowania można opisać wzorem $W(t) = W_0 \cdot 0{,}65^t$. Oszacuj wartość telefonu komórkowego po dwóch latach, jeśli początkowo był wart $W(0) = 700$ (zł).

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

5.5.1. Narysuj najpierw wykres funkcji $y = 2^x$, a potem przesuń go o 1 jednostkę w lewo. Jak widać z rysunku, wykres przesuniętej funkcji przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.
Możesz to sprawdzić rachunkiem: $2^{0+1} = 2$.



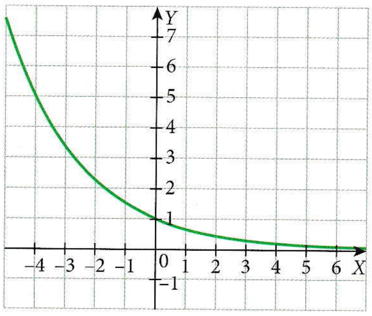
5.5.2. Jeśli w jednym układzie współrzędnych narysujesz wykres funkcji $y = -(0{,}5)^x$ oraz $y = -1$, to zauważysz, że wykres funkcji $y = -(0{,}5)^x$ trzeba przesunąć w dół co najmniej o 1 jednostkę. Otrzymasz wtedy wykres funkcji $y = -(0{,}5)^x - 1$. W tym przypadku $m = -1$.
Dla wszystkich $m < -1$ wykresy funkcji $y = -(0{,}5)^x + m$ również będą się znajdowały poniżej prostej $y = -1$.



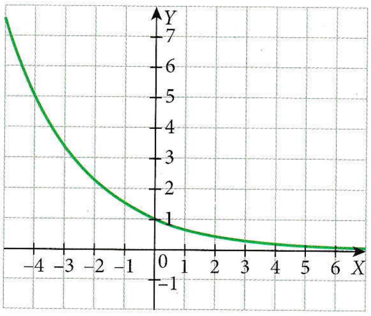
Odpowiedź: $m \le -1$.

5.5.3.

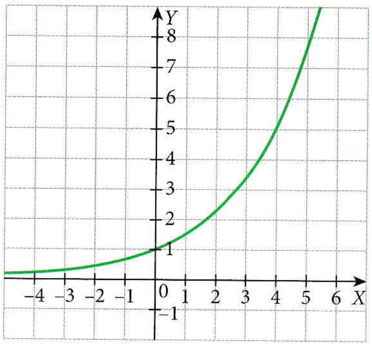
a)



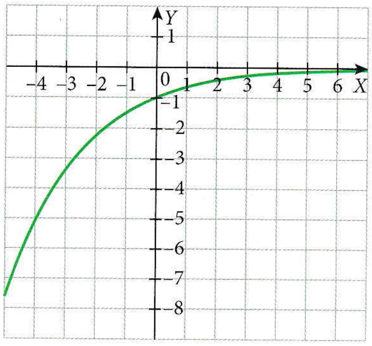
b)



c)

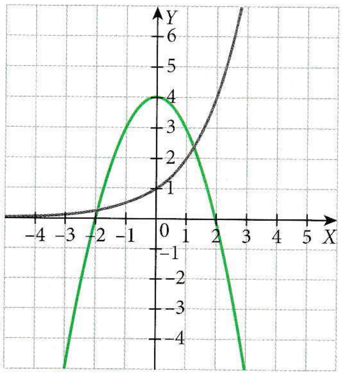


d)



Odpowiedź: Rosnące są funkcje $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ oraz $y = -\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$. Pierwsza z nich jest funkcją postaci $y = a^x$, gdzie $a > 1$. Druga powstała w wyniku odbicia symetrycznego względem osi OX funkcji postaci $y = a^x$, gdzie $a < 1$.

5.5.4. Aby sporządzić wykres funkcji $y = -x^2 + 4$, możesz wykres $y = x^2$ najpierw odbić symetrycznie względem osi OX, a potem przesunąć o 4 w górę.
Odpowiedź: Wykresy przecinają się w dwóch punktach.



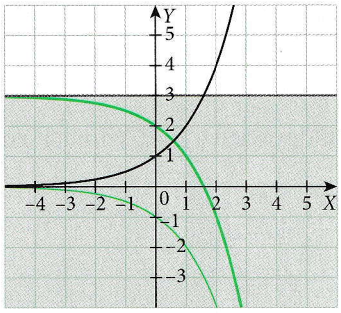
5.5.5. Odbij symetrycz
funkcji $y = 2^x$, a nastę
w górę. Zbiór wartości

5.5.6. Przesuń wykres
w prawo i 4 jednostki w
Odpowiedź: Funkcja p
$x < 4$.

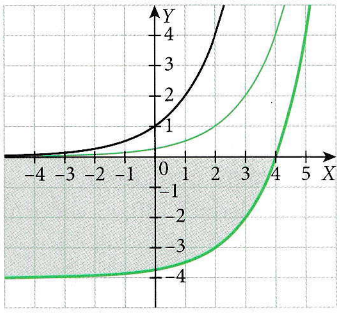
5.5.7. Kolejność sporzą
następująca:
$y = 3^x$, $y = -3^x$, $y = -3^{x+}$
Odpowiedź: Dla $x < -1$.

5.5.8. Dla $x = 4$ wartość
Zatem zachodzi równoś
Zatem $a = 2^{-0{,}25}$ i $M_x = 6$

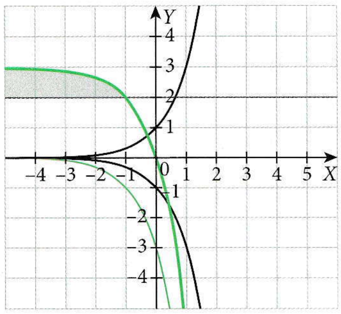
5.5.5. Odbij symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = 2^x$, a następnie przesuń go o 3 jednostki w górę. Zbiór wartości to przedział $(-\infty, 3)$.



5.5.6. Przesuń wykres funkcji $y = 2^x$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w dół.
Odpowiedź: Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x < 4$.



5.5.7. Kolejność sporządzania wykresów może być następująca:
$y = 3^x$, $y = -3^x$, $y = -3^{x+1}$, $y = -3^{x+1} + 3$.
Odpowiedź: Dla $x < -1$.

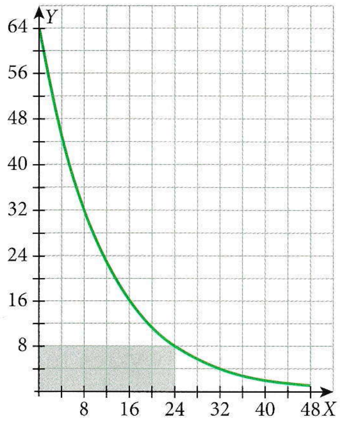


5.5.8. Dla $x = 4$ wartość $M_x = 0{,}5 \cdot 64 = 32$.
Zatem zachodzi równość: $64 \cdot a^4 = 32 \Rightarrow a^4 = 2^{-1}$.
Zatem $a = 2^{-0{,}25}$ i $M_x = 64 \cdot 2^{-0{,}25}$.

5.5.9.

$64 \cdot 2^{\frac{-1}{8} \cdot 24} = 64 \cdot 2^{-3} = 8$

Odpowiedź: Po 24 dniach zostanie 8 g pierwiastka.



5.5.10. Podstaw $t = 5$ i $C_0 = 4800 \cdot C(5) = 4{,}800 \cdot 1{,}1^5$. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.
Odpowiedź: 7730,45 walorów.

5.5.11. Najpierw wyznacz wartość a. Wykorzystaj do tego informację o danej wielkości bakterii (dla $t = 1$).
$K_1 = 160\,000$, czyli $10\,000 \cdot a^4 = 160\,000$. Zatem $a^4 = 16$. Z uwagi na to, że $a > 0$, otrzymasz $a = 2$. Do otrzymanego wzoru $K(t) = 10\,000 \cdot 2^{4t}$ podstaw $t = 8$.
Odpowiedź: Po 8 godzinach $K(8) = 10\,000 \cdot 2^{32}$.

5.5.12. Dla ułatwienia rachunków oblicz najpierw $e^{-1} = 0{,}37$. $M(4) = 375 \cdot e^{-4}$, więc $M(4) = 375 \cdot 0{,}37^4$.
Odpowiedź: Po 4 sekundach zostanie około 7 g.

5.5.13. Odpowiedź: 295,75 zł.