5.3.41. Ustal najpierw wzór określający cenę biletu w zależności od liczby sprzedanych biletów $c(x) = ax + b$, a następnie funkcję opisującą przychód $z(x) = c(x) \cdot x$.
$15 = 10\,000a + b$ i $12 = 15\,000a + b$. Rozwiąż układ równań, aby obliczyć a i b.
Otrzymasz $a = -0{,}0006$ i $b = 21$. Funkcja opisująca przychód ma wtedy postać

$z(x) = -0{,}0006x^2 + 21x$. Ma ona maksimum dla $x = \dfrac{-21}{2 \cdot (-0{,}0006)} = 17\,500$. Cena biletu wyniesie wtedy $c(17\,500) = -0{,}0006 \cdot 17\,500 + 21 = 10{,}5$.
Odpowiedź: $z(x) = -0{,}0006x^2 + 21x$ ma maksimum dla $x = 17\,500$ przy cenie $c = 10{,}5$ (zł).

5.4. Funkcja $f(x) = \dfrac{a}{x}$

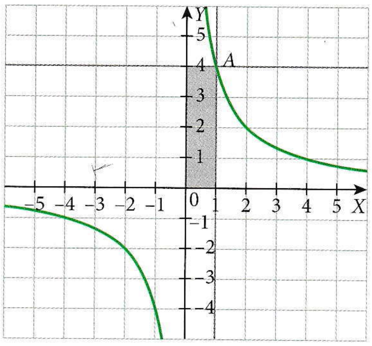
5.4.1. Napisz wzór funkcji $y = \dfrac{a}{x}$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt:

a) $A = (-1, -4)$; b) $A = (3, -2)$; c) $A = (-1, 3)$; d) $A = (-2; 0{,}2)$.

5.4.2. Narysuj wykres funkcji $y = \dfrac{3}{x}$ i określ, dla jakich x wartości funkcji są większe lub równe -1.

5.4.3. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \dfrac{-2}{x} + 1$ i podaj jej zbiór wartości.

5.4.4. Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = \dfrac{a}{x}$.
Wyznacz a.



5.4.5. Puszka w kształcie walca ma mieć objętość 0,3 dm^3. Wyraź pole podstawy puszki jako funkcję jej wysokości x. Sporządź wykres tej zależności. Przy jakiej wysokości pole podstawy puszki będzie mniejsze od 0,5 dm^2?

5.4.6. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = \frac{2}{x}$ oraz $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ i odczytaj, ile punktów wspólnych mają oba wykresy.

5.4.7. Jaki wzór może mieć funkcja, której wykresem jest hiperbola o asymptotach: $x = -1$ i $y = 2$? Narysuj wykres takiej funkcji.

5.4.8. Dla jakiej wartości a wykres funkcji $y = \frac{a}{x+2} - 3$ przechodzi przez początek układu współrzędnych? Sporządź wykres otrzymanej funkcji.

5.4.9. Krzysiek płynie z prędkością y i ma do przepłynięcia 2 km. Wyraź jego prędkość w zależności od czasu x (w godzinach). Z jaką minimalną prędkością musi płynąć Krzysiek, aby czas płynięcia nie był dłuższy niż 40 minut? Ile by mu zajęło pokonanie całej trasy, gdyby go złapał skurcz i nie mógł płynąć szybciej niż 1 km/h?

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

5.4.1. Podstaw do wzoru $y = \frac{a}{x}$, za x – odciętą punktu A i za y – rzędną tego punktu.

a) $A = (-1, -4)$

$-4 = \frac{a}{-1}$

$a = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$

b) $A = (3, -2)$

$-2 = \frac{a}{3}$

$a = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{x}$

c) $A = (-1, 3)$

$3 = \frac{a}{-1}$

$a = -3 \Rightarrow y = \frac{-3a}{x}$

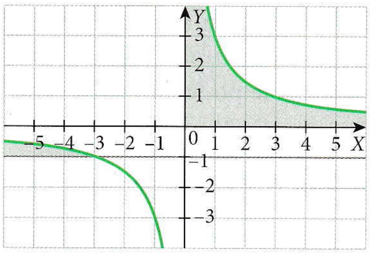
d) $A = (-2; 0,2)$

$0,2 = \frac{a}{-2}$

$a = -0,4 \Rightarrow y = \frac{-2}{5x}$

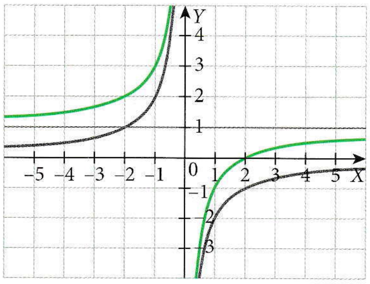
5.4.2. Do sporządzenia wykresu funkcji możesz wykorzystać tabelkę:

x	-3	-1	1	3
y	-1	-3	3	1



W tym samym układzie współrzędnych narysuj też wykres funkcji $y = -1$.
Na rysunku możesz zobaczyć, że wartości funkcji są większe lub równe -1 dla x należących do przedziału $(-\infty, -3\rangle$ lub $(0, \infty)$.

5.4.3. Zauważ, że wykres funkcji $f(x)$ możesz otrzymać z wykresu funkcji $y = \frac{-2}{x}$ przez przesunięcie o 1 jednostkę w górę. Zbiór wartości to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem 1.



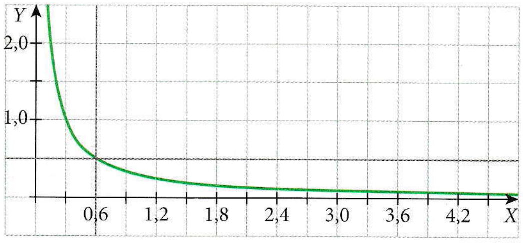
5.4.4. Wzór łatwo znajdziesz, gdy podstawisz w miejsce x i y współrzędne punktu A.

$A = (1, 4) \Rightarrow 4 = \frac{a}{1}$, więc $a = 4$.

Odpowiedź: $a = 4$.

5.4.5. Objętość pudełka to iloczyn pola podstawy (P) pudełka przez jego wysokość x.

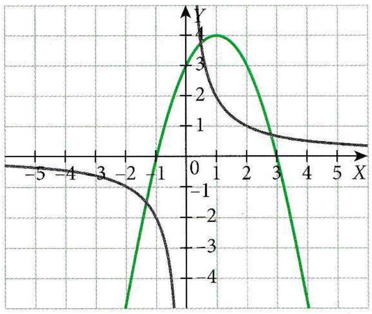
$P \cdot x = 0{,}3$. Zatem $P = \frac{0{,}3}{x} = \frac{3}{10x}$.



Funkcja $P(x)$ jest określona dla $x > 0$, więc wykres będzie się znajdował tylko w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.
Z wykresu wynika, że pole podstawy będzie mniejsze od 0,5 dm^2 dla $x > 0{,}6$. Sprawdź to rachunkiem: $\frac{3}{10x} < 0{,}5$ i $x > 0$, więc $3 < 5x$. Stąd $x > 0{,}6$.

Odpowiedź: Pole podstawy puszki będzie mniejsze od 0,5 dm^2, gdy jego wysokość będzie większa niż 6 cm.

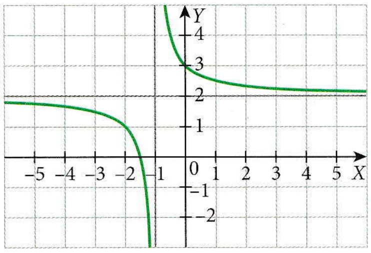
5.4.6. Aby sporządzić wykres funkcji $g(x)$, oblicz współrzędne wierzchołka $W = (1, 4)$, miejsca zerowe: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ i współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY, to jest $(0, 3)$.
Aby narysować wykres funkcji $f(x)$, możesz sporządzić tabelkę:



x	−2	−1	−0,5	0,5	1	2
y	−1	−1	−4	4	2	1

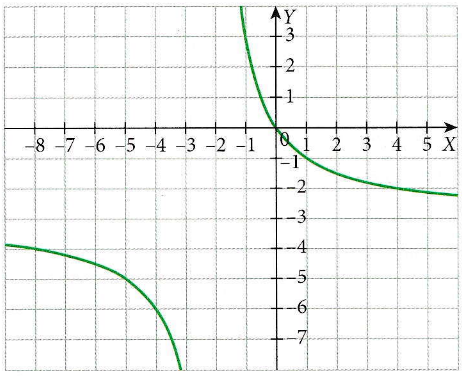
Odpowiedź: Wykresy mają trzy punkty wspólne.

5.4.7. Wykres otrzymamy z wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$ przez przesunięcie o 1 jednostkę w lewo i 2 jednostki w górę.

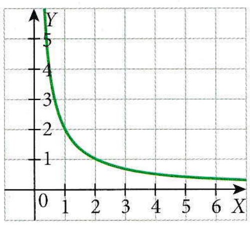


Wzór takiej funkcji to np. $y = \frac{1}{x+1} + 2$.

5.4.8. Podstaw 0 za x i y i oblicz a. $a = 6$. Wykres otrzymasz, przesuwając wykres funkcji $y = \frac{6}{x}$ o 2 jednostki w lewo i trzy w dół.



5.4.9. Zapisz wzór: $yx = 2$ albo $y = \frac{2}{x}$.



Czas płynięcia nie przekroczy 40 minut, gdy Krzysiek będzie płynął co najmniej 3 km/h. Jeśli będzie płynął nie szybciej niż 1 km/h, to zajmie mu to co najmniej 2 godziny.