2.3. Potęgi. Pierwiastki. Logarytmy

2.3.1. Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}01} =$ b) $\sqrt{0{,}0009} =$ c) $\sqrt{1\frac{155}{169}} =$

d) $\sqrt{5\sqrt{25}} =$ e) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$ f) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} =$

2.3.2. Wyłącz czynnik spod znaku pierwiastka:

a) $\sqrt{50} =$ b) $\sqrt[3]{16} =$ c) $2\sqrt{32} =$ d) $\sqrt[3]{(-81)} =$

2.3.3. Zapisz w najprostszej postaci: $5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{12}$.

2.3.4. Wykonaj działania i przedstaw w najprostszej postaci:

a) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} =$ b) $7\sqrt{2} \cdot \left(3 - \sqrt{2}\right) =$

c) $\sqrt{27} - 3\sqrt{3} =$ d) $\left(1 - 2\sqrt{5}\right)\left(1 + 2\sqrt{5}\right) =$

e) $\frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{2} =$ f) $\left(2\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 2\right) =$

g) $\sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{3}{9}} =$ h) $9\sqrt{45} - 2\sqrt{80} =$

i) $5\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{(-54)} =$ j) $\sqrt{13^2 - 12^2} =$

2.3.5. Wykonaj działania i przedstaw w najprostszej postaci:

a) $\left(3\sqrt{3} - 2\right)^2 =$ b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} =$

c) $2\sqrt[3]{2}\left(5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{32}\right) =$ d) $\left(2\sqrt[3]{12}\right)\left(3\sqrt[3]{18}\right) =$

2.3.6. Wykaż, że $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = 3$.

2.3.7. Wyłącz największy czynnik przed znak pierwiastka $\sqrt[3]{16x^4y^8z^7}$, gdzie x, y, z są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

2.3.8. Oblicz wartość wyrażenia $9x + \sqrt{25 - 10x + x^2}$ dla $x = 1$.

2.3.9. Oblicz: $\dfrac{\left(\sqrt{12\frac{1}{4}}+\sqrt{3+\frac{13}{4}}\right):2+2\cdot\sqrt{1\frac{15}{49}}:1\frac{1}{7}}{\sqrt{\frac{25}{36}}}$.

2.3.10. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\dfrac{7}{3\sqrt{3}}=$ b) $\dfrac{7+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}=$ c) $\dfrac{27\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}=$

d) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{49}}=$ e) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=$ f) $\dfrac{2\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}=$

2.3.11. Oblicz iloraz sumy liczb $3\sqrt{3}$ i $2\sqrt{6}$ przez ich różnicę.

2.3.12. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ dla $x=\sqrt{3}+1$.

2.3.13. Uzasadnij, że liczba $\dfrac{7}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ jest liczbą całkowitą.

2.3.14. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) $25^2\cdot 5^5=$ b) $5^{123}:5^{101}=$ c) $(121^2)^3\cdot 11^{-2}=$

d) $16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=$ e) $\dfrac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}}=$ f) $17^{-2}:17^{-5}=$

g) $0{,}5\cdot(2^3\cdot 2^{112})^{-2}=$ h) $15\cdot 3^{17}-6\cdot 3^{17}=$ i) $\dfrac{5}{6}\cdot 2^{14}-\dfrac{1}{3}\cdot 2^{14}=$

j) $0{,}5\cdot 3^{123}+8{,}5\cdot 3^{123}=$ k) $5^{12}+5^{12}+3\cdot 5^{12}=$ l) $17\cdot 2^{14}-4^7=$

2.3.15. Oblicz:

a) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5=$ b) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^2=$ c) $0{,}1^2+2\cdot 0{,}2^2-0{,}3^2=$

d) $27^{\frac{1}{3}}=$ e) $49^{\frac{1}{2}}=$ f) $\left(5\dfrac{11}{49}\right)^{\frac{1}{2}}=$

g) $125^{\frac{2}{3}}=$ h) $32^{-\frac{3}{5}}=$ i) $49^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{1}{3}}=$

j) $216^{\frac{2}{3}}:6^2=$

2.3.16. Porównaj liczby a i b, jeśli: $a = \dfrac{\sqrt[3]{27} + \left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{8^0 + \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}}$ i $b = \dfrac{3^{-1} \cdot \sqrt{20 + 2^{-2}}}{4^{-\frac{1}{2}}}$.

2.3.17. Zapisz w postaci jednej potęgi: $2 \cdot 5^{201} + 3 \cdot 5^{201}$.

2.3.18. Zapisz w postaci jednej potęgi: $\dfrac{27^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-2}}{3^{-0,5}}$.

2.3.19. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:

a) $10\,000^3 =$

b) $(0,0001)^{-3} =$

c) $(0,01)^2 \cdot 10^2 : 100^{-3} =$

d) $1000^{-3} \cdot 0,001^{-4} =$

2.3.20. Wykonaj działania:

a) $(3a^2)^2 =$

b) $(-4b^3)^2 =$

c) $\left(\dfrac{2x^{-2}}{3x^3}\right)^3 =$

d) $(3x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-3}) \cdot 4x^3 =$

2.3.21. Uporządkuj rosnąco liczby: 2^{-2}, $16^{\frac{1}{3}}$, $(0,5)^{2,1}$, $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-0,5}$, $0,5^{\sqrt{2}}$.

2.3.22. Która liczba jest większa: 2^{655} czy 3^{327}?

2.3.23. Wykaż, że wartość liczbowa wyrażenia $2^{126} - 2^{123} - 9 \cdot 2^{122}$ jest wielokrotnością liczby 10.

2.3.24. Na egzamin przygotowano 25 pytań z dwiema odpowiedziami do wyboru i 15 pytań z 4 odpowiedziami do wyboru. Ile było możliwych odpowiedzi?

2.3.25. Wykonaj działania. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.

a) $0,00125 \cdot 8 \cdot 10^{11} =$

b) $\dfrac{10,74 \cdot 10^{-7}}{5,37 \cdot 10^{-8}} =$

c) $8,5 \cdot 10^5 : 2 \cdot 10^{-13} =$

d) $\dfrac{14\,400\,000\,000}{0,00012} =$

2.3.26. Masa protonu jest równa $1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg. Masa Ziemi – $6 \cdot 10^{24}$ kg. Ile razy masa Ziemi jest większa od masy protonu?
A. $3{,}59 \cdot 10^{-3}$ razy; B. $3{,}59 \cdot 10^{51}$ razy; C. $3{,}59 \cdot 10^{-51}$ razy; D. $3{,}59 \cdot 10^{3}$ razy.

2.3.27. Średnia odległość Marsa od Słońca jest równa $2{,}28 \cdot 10^{8}$ km, a Plutona – $6 \cdot 10^{9}$ km. Ile razy odległość Plutona od Słońca jest większa od odległości Marsa od Słońca?

2.3.28. Masa Jowisza jest równa $M = 1{,}8986 \cdot 10^{27}$ kg. Masa Io, jednego z jego księżyców, jest równa $m = 8{,}93 \cdot 10^{22}$ kg. Odległość Io od Jowisza średnio wynosi $r = 4{,}21 \cdot 10^{8}$ m.
Z jaką siłą grawitacji oddziałuje Jowisz na Io? Skorzystaj ze wzoru na siłę grawitacji:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}, \text{ gdzie } G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$

2.3.29. Atom węgla ma wielkość około $c = 1{,}24 \cdot 10^{-10}$ m, a wirus $w = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ m. Ile razy wirus jest większy od atomu węgla?

2.3.30. W próbce znajduje się $N_0 = 6{,}4 \cdot 10^{17}$ atomów promieniotwórczego azotu ^{13}N. Okres połowicznego rozpadu tego izotopu wynosi $T_{0,5} = 10$ minut. Oblicz, ile atomów jodu zostanie po upływie godziny? Skorzystaj ze wzoru: $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{0,5}}}$, gdzie

N_0 – początkowa liczba atomów, N – liczba atomów po upływie czasu t.

Tabela przedstawia natężenie wybranych źródeł dźwięku. Wykorzystaj dane z tabeli w zadaniu 2.3.31. i 2.3.32.

Źródło	Natężenie dźwięku [W/m²]	Źródło	Natężenie dźwięku [W/m²]
szept ledwo słyszalny	10^{-12}	pociąg	10^{-4}
szelest liści	10^{-11}	młot pneumatyczny	10^{-2}
rozmowa	10^{-9} do 10^{-8}	startujący odrzutowiec	1
odkurzacz	10^{-5}	próg bólu	10^{2}

2.3.31. Ile razy natężenie dźwięku startującego odrzutowca jest większe od natężenia dźwięku pracującego odkurzacza?
A. 10 000 razy; B. 0,00001 razy; C. 0,0001 razy; D. 100 000 razy.

2.3.32. O ile W/m^2 natężenie dźwięku najgłośniejszej rozmowy jest większe od natężenia dźwięku najcichszej rozmowy?
A. o 10 W/m^2; B. o 10^{-1} W/m^2; C. o $9 \cdot 10^{-9}$ W/m^2; D. o 9000 W/m^2.

2.3.33. Zamień pierwiastek na potęgę:

a) $\sqrt[5]{5^3} =$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^2}} =$ c) $\sqrt[7]{16} =$ d) $\sqrt{\sqrt[5]{11^3}} =$

2.3.34. Zamień potęgę na pierwiastek:

a) $5^{\frac{2}{5}} =$ b) $9^{-\frac{1}{3}} =$ c) $\left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} =$

2.3.35. Uzasadnij, że $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2 = 10$.

2.3.36. Wykonaj działania: $\left(7-13^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(7+13^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2.3.37. Oblicz: $\left[\left(8-28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(8+28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$.

2.3.38. Przedstaw wyrażenie w postaci potęgi liczby 3: $\left(9^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{5}}\right) : \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{5}}$.

2.3.39. Zapisz w postaci potęgi bez użycia symbolu pierwiastka: $\left(7^{12}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{7^6}$.

2.3.40. Zapisz w najprostszej postaci: $\dfrac{11^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{121} \cdot 11^{-\frac{1}{5}}}{\left(121^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{2}{3}}}$.

2.3.41. Oblicz: $\dfrac{12^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + \dfrac{45^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}}$.

2.3.42. Oblicz:

a) $\log_5 625 =$ b) $\log_{0,9} 0,81 =$ c) $\log 0,001 =$

d) $\log_6\left(\frac{1}{216}\right) =$ e) $\log_2(\log_3 81) =$ f) $\log_5(\log 10) =$

g) $\log_{0,1}(\log_6 6) =$ h) $\log_3\sqrt{3} =$

2.3.43. Oblicz x:

a) $\log_5 x = -3$ b) $\log_3 x = 0$ c) $\log x = -1$ d) $\log_x 0{,}25 = 2$

2.3.44. Wiedząc, że $\log 3 = a$ i $\log 8 = b$, oblicz:

a) $\log 24 =$ b) $\log 64 =$ c) $\log 8\sqrt{3} =$

d) $\log \sqrt[3]{3^5} =$ e) $\log \dfrac{64}{3} =$ f) $\log \dfrac{8}{9} =$

2.3.45. Wyznacz x, jeśli:

a) $\log 2x + \log 5 = 2$ b) $\log 5 + \log 5x = 3$

c) $\log\left(x + \sqrt{3}\right) + \log\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$ d) $\log(200 - x) = 2$

2.3.46. Oblicz:

a) $5\log_3 9 + 7\log_2 8 =$ b) $6\log_2 64 - \log_7 49 =$

c) $\log_6 3 + \log_6 12 =$ d) $\log_6 108 - \log_6 18 =$

2.3.47. Zapisz jako jeden logarytm:

a) $3\log 6 + 5\log 2 =$ b) $4\log 2 - 2\log 8 =$

c) $5\log 3 =$ d) $5\log 7 + 3\log 11 =$

2.3.48. Jeżeli $250 = 3^x$, to:

A. $\log_3 x = 250$; B. $\log_x 3 = 250$; C. $\log_x 250 = 3$; D. $\log_3 250 = x$.

2.3.49. Wyrażenie $2\log x - \log y + 3\log z$ jest równe:

A. $\log \dfrac{2x + 3z}{y}$; B. $\log \dfrac{x^2 z^3}{y}$; C. $\log(2x - y + 3z)$; D. $\log \dfrac{x^2}{yz^3}$.

2.3.50. Wiedząc, że $\log_2 3 = 1{,}59$ i $\log_2 7 = 2{,}81$, oblicz:

a) $\log_2 21 =$ b) $\log_2 81 =$ c) $\log_2 \dfrac{49}{9} =$

2.3.51. Oblicz w:

a) $w = 3^{\log_3 17}$ b) $w = 23^{2\log_{23} 12}$ c) $w = 3^{2\log_3 5 - \log_3 \frac{1}{8}}$

2.3.52. Skalę Richtera (S_R) służącą do określania siły trzęsienia ziemi można opisać wzorem $S_R(A) = \log A$, gdzie A jest amplitudą fali sejsmicznej.

a) Oblicz, o ile wzrośnie siła trzęsienia ziemi, jeśli amplituda A wzrośnie sto razy.

b) Wartość S_R wzrosła o trzy jednostki. Jaki był wzrost amplitudy A?

c) Trzęsienie ziemi 27 kwietnia 2015 roku w Indiach miało siłę 5,1 w skali Richtera. Dwa dni wcześniej było 500 razy większe trzęsienie ziemi w Nepalu. Jaką siłę w skali Richtera miało trzęsienie ziemi w Nepalu? Przyjmij $\log 5 = 0{,}7$.

2.3.53. Uzasadnij, że $\dfrac{3^{\log_2 40}}{3^{\log_2 5}} = 27$.

2.3.54. Porównaj liczby x, y, z, gdy: $\log_x\sqrt{5} = \dfrac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{5}} y = 2$, $\log_2 32 = z$.

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

2.3.1.

a) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; b) $\sqrt{0{,}0009} = 0{,}03$; c) $\sqrt{1\dfrac{155}{169}} = \sqrt{\dfrac{324}{169}} = \dfrac{18}{13}$;

d) $\sqrt{5\sqrt{25}} = \sqrt{5 \cdot 5} = 5$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$; f) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{4}{3}$.

2.3.2.

a) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; b) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; c) $2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$; d) $\sqrt[3]{(-81)} = -3\sqrt[3]{3}$.

2.3.3. Zauważ, że $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ i $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Wykonaj wskazane działania.
Odpowiedź: $11\sqrt{3}$.

2.3.4.

a) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$; b) $7\sqrt{2} \cdot (3 - \sqrt{2}) = 21\sqrt{2} - 14$;

c) $\sqrt{27} - 3\sqrt{3} = 0$; d) $(1 - 2\sqrt{5})(1 + 2\sqrt{5}) = -19$;

e) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$; f) $(2\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 2) = 8 + 3\sqrt{5}$;

g) $\sqrt{\dfrac{3}{16}} - \sqrt{\dfrac{3}{9}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{12}$; h) $9\sqrt{45} - 2\sqrt{80} = 19\sqrt{5}$;

i) $5\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{(-81)} = 16\sqrt[3]{3}$; j) $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$.

2.3.5.

a) $\left(3\sqrt{3}-2\right)^2 = 27 - 12\sqrt{3} + 4 = 31 - 12\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28} = 14$;

c) $2\sqrt[3]{2}\left(5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{32}\right) = 4$;

d) $\left(2\sqrt[3]{12}\right)\left(3\sqrt[3]{18}\right) = 36$.

2.3.6. Możesz zastosować własność $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. Otrzymasz wtedy $\sqrt[6]{729} = 3$.

Możesz też najpierw obliczyć wewnętrzny pierwiastek $\sqrt{729} = 27$, a następnie $\sqrt[3]{27} = 3$.

2.3.7. Zauważ, że $16 = 2^4 = 2\cdot 2^3$.
Podobnie $x^4 = x\cdot x^3$, $y^8 = y^2\cdot (y^2)^3$ i $z^7 = z\cdot (z^2)^3$.
Odpowiedź: $2xy^2z^2\cdot\sqrt[3]{2xy^2z}$.

2.3.8.

I sposób:	II sposób:
Podstaw $x = 1$:	Przekształć wyrażenie do najprostszej postaci:
$9 + \sqrt{25 - 10 + 1^2} = 9 + \sqrt{16} = 13$.	$9x + \sqrt{(5-x)^2} = 9x + \lvert 5 - x\rvert$.
	Podstaw $x = 1$:
	$9 + \lvert 4\rvert = 13$.

Odpowiedź: 13.

2.3.9. Zanim obliczysz wartości pierwiastków z liczb mieszanych, musisz je przedstawić w postaci ułamków niewłaściwych. Pamiętaj o kolejności działań.
Odpowiedź: 6.

2.3.10.

a) $\dfrac{7}{3\sqrt{3}}$	Należy pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{3}$. Odpowiedź: $\dfrac{7}{9}\sqrt{3}$.
b) $\dfrac{7+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}$	Należy pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez $\left(7+\sqrt{7}\right)$. Pamiętaj o tym, aby wziąć licznik i mianownik w nawias. Teraz w mianowniku skorzystaj z wzoru skróconego mnożenia: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, a w liczniku ze wzoru: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Odpowiedź: $\dfrac{\left(4+\sqrt{3}\right)}{3}$.

c) $\dfrac{27\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}$	Zauważ, że w mianowniku masz $\sqrt[3]{3^2}$, zatem aby usunąć niewymierność z mianownika, wystarczy pomnożyć licznik i mianownik przez $\sqrt[3]{3}$. Odpowiedź: $9\sqrt[3]{9}$.
d) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{49}}$	Pomnóż licznik i mianownik przez $\sqrt[3]{7}$. Odpowiedź: $\sqrt[3]{7}$.
e) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$	Licznik i mianownik pomnóż przez $\sqrt{7}$. Pamiętaj o wzięciu licznika w nawias. Odpowiedź: $\dfrac{7+\sqrt{7}}{7}$.
f) $\dfrac{2\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}$	Licznik i mianownik pomnóż przez $\sqrt[3]{6^2}$. Odpowiedź: $2\sqrt[3]{6}$.

2.3.11. Wskazówka: Zapisz iloraz w postaci ułamka i usuń niewymierność z mianownika.
Odpowiedź: $17 + 12\sqrt{2}$.

2.3.12.
I sposób:

$\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$	Przekształć licznik wyrażenia, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.
$(x-1)$	Możesz skrócić ułamek przez $(x-1)$, ponieważ $x \neq 1$.
$\sqrt{3}+1-1$	Oblicz wartość wyrażenia, podstawiając $x = \sqrt{3}+1$.

II sposób:

$\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}+1\right)+1}{\sqrt{3}+1-1}$	Podstaw $x = \sqrt{3}+1$.
$\dfrac{\left(3+2\sqrt{3}+1\right) - 2\left(\sqrt{3}+1\right)+1}{\sqrt{3}}$	Wykonaj działania w liczniku i mianowniku.
$\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$	Usuń niewymierność z mianownika, albo skróć ułamek, korzystając z faktu, że $3 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Wartość wyrażenia jest równa $\sqrt{3}$.

2.3.13. Wskazówka: Usuń niewymierności z mianowników. Otrzymasz wtedy pewną sumę. Po wykonaniu działań otrzymasz liczbę 2, która jest liczbą całkowitą.

2.3.14.

a) $25^2 \cdot 5^5 = (5^2)^2 \cdot 5^5 = 5^9$;
b) $5^{123} : 5^{101} = 5^{22}$;
c) $(121^2)^3 \cdot 11^{-2} = 11^{10}$;
d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7$;
e) $\dfrac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$;
f) $17^{-2} : 17^{-5} = 17^3$;
g) $0{,}5 \cdot (2^3 \cdot 2^{112})^{-2} = 2^{-231}$;
h) $15 \cdot 3^{17} - 6 \cdot 3^{17} = 9 \cdot 3^{117} = 3^2 \cdot 3^{17} = 3^{19}$;
i) $\frac{5}{6} \cdot 2^{14} - \frac{1}{3} \cdot 2^{14} = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2^{14} = 2^{-1} \cdot 2^{14} = 2^{13}$;
j) $0{,}5 \cdot 3^{123} + 8{,}5 \cdot 3^{123} = 9 \cdot 3^{123} = 3^{125}$;
k) $5^{12} + 5^{12} + 3 \cdot 5^{12} = 5 \cdot 5^{12} = 5^{13}$;
l) $17 \cdot 2^{14} - 4^7 = 17 \cdot 2^{14} - 2^{14} = 16 \cdot 2^{14} = 2^{18}$.

2.3.15.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$;
b) $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$;
c) $0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}2^2 - 0{,}3^2 = 0$;
d) $27^{\frac{1}{3}} = 3$;
e) $49^{\frac{1}{2}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7$;
f) $\left(5\frac{11}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{256}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\frac{2}{7}$;
g) $125^{\frac{2}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$;
h) $32^{-\frac{3}{5}} = \left(2^5\right)^{-\frac{3}{5}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$;
i) $49^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} = 7 \cdot 4 = 28$;
j) $216^{\frac{2}{3}} : 6^2 = \left(6^3\right)^{\frac{2}{3}} : 6^2 = 1$.

2.3.16. Należy każde z wyrażeń przedstawić w najprostszej postaci. Zauważ, że aby łatwo obliczyć pierwiastek z liczby mieszanej, należy przedstawić ją w postaci ułamka niewłaściwego.
Odpowiedź: $a = 3$, $b = 3$, a więc $a = b$.

zymasz wtedy pewną
ą całkowitą.

2.3.17. Zauważ, że $2a + 3a = 5a$. Wystarczy sumę z lewej strony zapisać w postaci iloczynu i wykonać działania na potęgach.
Odpowiedź: 5^{202}.

2.3.18. Zauważ, że podstawą każdej występującej w wyrażeniu potęgi jest liczba 3.
Odpowiedź: 3^{-2}.

2.3.19. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:
a) $10\,000^3 = (10^4)^3 = 10^{12}$;
b) $(0{,}0001)^{-3} = (10^{-4})^{-3} = 10^{12}$;
c) $(0{,}01)^2 \cdot 10^2 : 100^{-3} = 10^{-4+2} : 10^{-6} = 10^{-2+6} = 10^4$;
d) $1000^{-3} \cdot 0{,}001^{-4} = 10^3$.

2.3.20. Wykonaj działania:
a) $(3a^2)^2 = 9a^4$;
b) $(-4b^3)^2 = 16b^6$;
c) $\left(\frac{2x^{-2}}{3x^3}\right)^3 = \frac{8x^{-6}}{27x^9} = \frac{8}{27}x^{-15}$;
d) $(3x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-3}) \cdot 4x^3 = 12x^2 + 8x + 4$.

2.3.21. Przedstaw każdą z liczb w postaci potęgi liczby 2, a następnie uporządkuj, poczynając od najmniejszego wykładnika do największego.

Odpowiedź: $(0{,}5)^{2{,}1} = 2^{-2{,}1}$, 2^{-2}, $0{,}5^{\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{2}}$, $16^{\frac{1}{3}} = 2^{1\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{8}\right)^{-0{,}5} = 2^{1{,}5}$.

2.3.22. Aby porównać dwie potęgi, wygodnie jest obliczyć ich iloraz. W tym przypadku doprowadź najpierw do postaci, w której są takie same wykładniki: $2^{655} = 2^{327} \cdot 2^{328}$.

Zatem $\frac{2^{327} \cdot 2^{328}}{3^{327}} = 2^{328} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{327}$.

Jest to liczba większa od $2^{328} \cdot (0{,}5)^{327} = 2$, więc liczba większa od jedności. Oznacza to, że liczba 2^{655} jest większa od 3^{327}.

2.3.23. Zauważ, że $2^{126} = 2^5 \cdot 2^{121}$, $2^{123} = 2^2 \cdot 2^{121}$, a $2^{122} = 2 \cdot 2^{121}$.
Wystarczy teraz wyłączyć 2^{121} przed nawias:
$2^{121} \cdot (2^5 - 2^2 - 18) = 2^{121} \cdot (32 - 4 - 18) = 2^{121} \cdot 10$.

$= 2\frac{2}{7}$;

$= \frac{1}{8}$;

$: 6^2 = 1$.

staci. Zauważ, że aby
ić ją w postaci ułamka

2.3.24. Jeżeli na każde pytanie można udzielić jednej z dwóch odpowiedzi, to przy dwóch pytaniach możliwości jest $2^2 = 4$, przy trzech – 2^3 itd. Dwadzieścia pięć pytań to 2^{25} możliwości. Analogicznie, przy czterech odpowiedziach na każde pytanie – przy 15 pytaniach jest $4^{15} = 2^{30}$ możliwych odpowiedzi. Wymnóż te wartości.
Odpowiedź: Było 2^{55} możliwości.

2.3.25.

a) $0{,}00125 \cdot 8 \cdot 10^{11} = 1 \cdot 10^{9}$;

b) $\dfrac{10{,}74 \cdot 10^{-7}}{5{,}37 \cdot 10^{-8}} = 2 \cdot 10^{1}$;

c) $8{,}5 \cdot 10^{5} : 2 \cdot 10^{-13} = 4{,}25 \cdot 10^{-8}$;

d) $\dfrac{14\,400\,000\,000}{0{,}00012} = 1{,}2 \cdot 10^{14}$.

2.3.26. Podziel masę Ziemi przez masę protonu.
Odpowiedź: B.

2.3.27. Odpowiedź: Około 26,3 razy.

2.3.28. Podstaw wartości: $\dfrac{6{,}67 \cdot 1{,}8986 \cdot 8{,}93}{(4{,}21)^2} \cdot \dfrac{10^{-11} \cdot 10^{27} \cdot 10^{22}}{\left(10^{8}\right)^2} \left[\dfrac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \dfrac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2}\right]$.

Skorzystaj z własności działań na potęgach: $F = 6{,}4 \cdot 10^{22}$ N.
Odpowiedź: Jowisz przyciąga Io z siłą $6{,}4 \cdot 10^{22}$ N.

2.3.29. Wystarczy obliczyć iloraz $\dfrac{w}{c} = \dfrac{1{,}5}{1{,}24} \cdot \dfrac{10^{-6}}{10^{-10}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{4} = 12\,000$.

Odpowiedź: Wirus jest 12 000 razy większy od atomu wodoru.

2.3.30. Podstaw dane do wzoru. Nie zapomnij zamienić godziny na minuty.
Odpowiedź: $N = 10^{16}$.

2.3.31. Wybierz wartości z tabeli i wykonaj dzielenie, korzystając z praw działań na potęgach o tej samej podstawie.
Zapisz odpowiedzi A, B, C, D jako potęgi o podstawie 10.
Odpowiedź: D.

2.3.32. Oblicz różnicę między górną a dolną granicą natężenia dźwięku rozmowy.
Odpowiedź: C.

2.3.33. Skorzystaj ze wzoru: $\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$.

a) $\sqrt[5]{5^3} = 5^{\frac{3}{5}}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$;

c) $\sqrt[7]{16} = 2^{\frac{4}{7}}$;

d) $\sqrt{\sqrt[5]{11^3}} = \left(11^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = 11^{0,3}$.

2.3.34.

a) $5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2}$; b) $9^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$; c) $\left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$.

2.3.35. Przekształć lewą stronę równości, korzystając ze wzoru $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, gdy $a \geq 0$.

2.3.36. Zastosuj najpierw wzór: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, a potem: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\left[\left(7 - 13^{\frac{1}{2}}\right)\left(7 + 13^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(49 - 13\right)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6.$$

Odpowiedź: 6.

2.3.37.

$$16 + 2\left(8 - 28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(8 + 28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Zastosuj najpierw wzór skróconego mnożenia na kwadrat dwumianu: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$16 + 2\left[\left(8 - 28^{\frac{1}{2}}\right)\left(8 + 28^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 16 + 2\left(8^2 - 28\right)^{\frac{1}{2}}$$

Teraz możesz najpierw zastosować wzór: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, a potem: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Odpowiedź: 28.

2.3.38. Zastąp każdą z podstaw potęgą liczby 3 i wykonaj działania na potęgach o tej samej podstawie.
Odpowiedź: $3^{0,7}$.

2.3.39. Skorzystaj ze wzoru $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$, a następnie wykonaj działania na potęgach o tej samej podstawie.
Odpowiedź: 7^6.

2.3.40. W liczniku zastąp pierwiastek odpowiednią potęgą o podstawie 11, a następnie wykonaj działania na potęgach o tej samej podstawie. W mianowniku przedstaw każdą z liczb jako potęgę 11 i wykonaj działania na potęgach.
Odpowiedź: $11^2 = 121$.

2.3.41. Zauważ, że tym razem nie podstawy są takie same, a wykładniki. Zastosuj wzór: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$. Otrzymasz: $\dfrac{36^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{3}}}$. Teraz każdą z postaw potęg występujących w mianowniku i liczniku zastąp potęgą pewnej liczby.
Odpowiedź: 4,5.

2.3.42.

a) $\log_5 625 = 4$, bo $5^4 = 625$;

b) $\log_{0,9} 0,81 = 2$, bo $0,9^2 = 0,81$;

c) $\log 0,001 = -3$, bo $10^{-3} = 0,001$;

d) $\log_6\left(\frac{1}{216}\right) = -3$, bo $6^{-3} = \frac{1}{216}$;

e) $\log_2(\log_3 81) = \log_2 4 = 2$;

f) $\log_5(\log 10) = \log_5 1 = 0$;

g) $\log_{0,1}(\log_6 6) = \log_{0,1} 1 = 0$;

h) $\log_3\sqrt{3} = 0,5$, bo $3^{0,5} = \sqrt{3}$.

2.3.43.

a) $\log_5 x = -3 \Rightarrow x = 5^{-3} = \frac{1}{125}$;

b) $\log_3 x = 0 \Rightarrow x = 3^0 = 1$;

c) $\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = 0,1$;

d) $\log_x 0,25 = 2 \Rightarrow x^2 = 0,25$. Podstawa logarytmu jest dodatnia, więc $x = 0,5$.

2.3.44.

a) $\log 24 = a + b$;

b) $\log 64 = 2b$;

c) $\log 8\sqrt{3} = b + 0,5a$;

d) $\log \sqrt[3]{3^5} = \frac{5}{3}a$;

e) $\log \frac{64}{3} = 2b - a$;

f) $\log \frac{8}{9} = b - 2a$.

2.3.45.

a) $\log(2x \cdot 5) = 2$	$10x = 100$, więc $x = 10$
b) $\log(5 \cdot 5x) = 3$	$25x = 10^3$, więc $x = 40$
c) $\log\left[\left(x + \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{3}\right)\right] = 0$	$x^2 - 3 = 1$ i $x > \sqrt{3}$, więc $x = 2$
d) $200 - x = 100$	$x = 100$

2.3.46. Oblicz:

a) $5\log_3 9 + 7\log_2 8 = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 31$	Zwróć uwagę na to, że w tym przypadku logarytmy nie mają takich samych podstaw.
b) $6\log_2 64 - \log_7 49 = 6 \cdot 6 - 2 = 34$	
c) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 36 = 2$	Zastosuj wzory na sumę lub różnicę logarytmów, a potem skorzystaj z definicji logarytmu.
d) $\log_6 108 - \log_6 18 = \log_6 6 = 1$	

2.3.47.

a) $3\log 6 + 5\log 2 = \log 6912$

b) $4\log 2 - 2\log 8 = \log \frac{1}{4}$

c) $5\log 3 = \log 243$

d) $5\log 7 + 3\log 11 = \log(7^5 \cdot 11^3)$

2.3.48. Skorzystaj z definicji logarytmu: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.
Odpowiedź: D.

2.3.49. Pamiętaj o kolejności działań. Najpierw skorzystaj ze wzoru na logarytm potęgi; potem, w kolejności występowania, na logarytm ilorazu i iloczynu.
Odpowiedź: B.

2.3.50. Przedstaw każdą z liczb logarytmowanych jako iloczyn, iloraz lub potęgę liczb 3 i 7. Na przykład: $81 = 3^4$. Teraz możesz skorzystać ze własności logarytmów.
Odpowiedź: a) 4,4; b) 6,36; c) 2,44.

2.3.51.

a) $w = 3^{\log_3 17}$, więc $w = 17$.

b) Zauważ, że $2\log_{23}12 = \log_{23}12^2$ i $\frac{E}{T}$.

$$w = 23^{2\log_{23}12} = 23^{\log_{23}144} = 144$$

c) Skorzystaj ze wzorów na logarytm potęgi, a następnie na sumę logarytmów.

$$w = 3^{\log_3 5^2 - \log_3 \frac{1}{8}} = 3^{\log_3 200} = 200$$

2.3.52.

a) $S_R(A) = \log A$; $S_R(A_1) = \log A_1 = \log(100 \cdot A) =$ $= \log 100 + \log A = 2 + S_R(A)$	Amplituda wzrośnie sto razy, więc: $A_1 = 100 \cdot A$. Skorzystaj ze wzoru na logarytm iloczynu. Odpowiedź: Siła trzęsienia wzrośnie o 2 jednostki.
b) $S_R(A) + 3 = \log A + \log 10^3 =$ $= \log(A \cdot 1000)$.	Odpowiedź: Amplituda wzrosła 1000 razy.
c) $S_R(A_2) = \log A_2 = \log(500 \cdot A_1) =$ $= \log 5 + \log 100 + \log A_1$	Oznacz: $S_R(A_1) = 5{,}1$; $A_2 = 500\, A_1$. Odpowiedź: Trzęsienie ziemi w Nepalu miało siłę 7,8 w skali Richtera.

2.3.53.

$\dfrac{3^{\log_2 8 + \log_2 5}}{3^{\log_2 5}}$	Przedstaw 40 w postaci iloczynu $8 \cdot 5$. Skorzystaj ze wzoru na logarytm iloczynu.
$\dfrac{3^{\log_2 8} \cdot 3^{\log_2 5}}{3^{\log_2 5}}$	Zastosuj wzór $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, a potem skróć ułamek i oblicz logarytm.

2.3.54. Oblicz x, y i z, korzystając z definicji logarytmu.
Odpowiedź: $x = y = z$.