7.1.42. Przedstaw 125, jako potęgę liczby 5: $125^{\sin\alpha} = (5^3)^{\sin\alpha} = 5^{3\sin\alpha}$. Oblicz $\sin\alpha$. Obliczoną wartość wstaw do wykładnika potęgi.
Odpowiedź: 25.

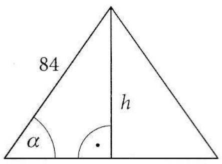
7.1.43.

$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha$ $\sin^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$	Wyłącz wspólny czynnik $\sin^2\alpha$ przed nawias. Zastosuj „wzór jedynkowy" (trzeba to zrobić 2 razy).

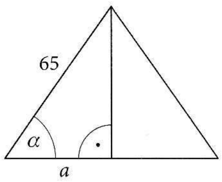
7.2. Zastosowania funkcji trygonometrycznych, m.in. w planimetrii

7.2.1. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta ostrego ma długość $4\sqrt{3}$, a przeciwprostokątna ma długość 8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych tego trójkąta.

7.2.2. Oblicz wysokość trójkąta, gdy:
a) $\sin\alpha = 0{,}63$; b) $\sin\alpha = 0{,}135$;
c) $\sin\alpha = 0{,}01$; d) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$.

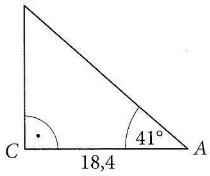


7.2.3. Oblicz długość $2a$ podstawy trójkąta, jeśli:
a) $\cos\alpha = 0{,}45$;
b) $\cos\alpha = 0{,}975$;
c) $\cos\alpha = 0{,}707$.



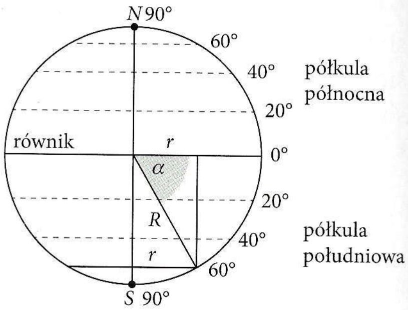
7.2.4. Oblicz pole trójkąta prostokątnego ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty, mając dane: $|AB| = 90$ cm i sinus kąta ostrego przy wierzchołku B jest równy 0,85.

7.2.5. W trójkącie ABC dane są: $\gamma = 90°$, $\alpha = 41°$ i $b = 18{,}4$. Oblicz obwód trójkąta.

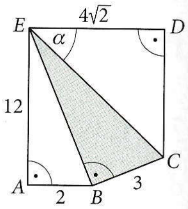


7.2.6. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta α ma długość $a = 124$ cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta i miary jego kątów, jeśli $\sin\alpha = 0{,}4539$.

7.2.7. Równoleżnik odpowiadający szerokości geograficznej południowej 60° dzieli półkulę południową na dwa obszary: „wyjące pięćdziesiątki" i „bezludne sześćdziesiątki". Pierwszy z nich jest znany z tego, że wieją tam najsilniejsze wiatry na Ziemi. Drugi – określa pas wód Oceanu Południowego otaczający Antarktydę. Oblicz długość promienia tego równoleżnika przyjmując, że promień R Ziemi ma długość 6370 km.

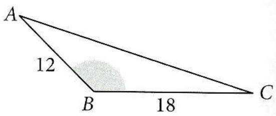


7.2.8. Wykorzystaj dane z rysunku, aby obliczyć wartość wyrażenia $w = 0{,}25 + \dfrac{5}{32\,\mathrm{tg}^2\alpha - 25}$.

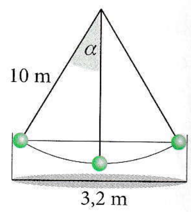


7.2.9. Bok trójkąta ma długość 16, a tangensy kątów przyległych do tego boku są równe odpowiednio $\frac{3}{4}$ i 3. Oblicz pole tego trójkąta.

7.2.10. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę $\beta = 135°$. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli $|BC| = 18$ i $|AB| = 12$.



7.2.11. Wahadło Foucaulta, które można obejrzeć w budynku Wydziału Fizyki UAM w Poznaniu, służy do potwierdzenia ruchu obrotowego Ziemi. Jest to stalowa kula zawieszona na drucie o długości 10 m nad „różą wiatrów" o średnicy 3,2 m. Jaki jest maksymalny kąt, na jaki można wychylić wahadło, jeśli „róża wiatrów" jest otoczona barierą uniemożliwiającą wychylenie wahadła poza nią?



7.2.12. Oblicz wysokość drzewa, którego cień ma długość c, a kąt padania promieni słonecznych ma miarę α.

a) $c = 9$ m, $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$; b) $c = 18$ m, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5$; c) $c = 20$ m, $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}28$;
d) $c = 10$ m, $\alpha = 46°$; e) $c = 4$ m, $\alpha = 60°$.

7.2.13. Stosunek dług
rozwartego tego trapez
A. mniejsza od 120°;

7.2.14. Drabina opier
się w odległości 1,5 m
A. 4,12 m; B.

7.2.15. Jaki jest kąt
go z punktu A na Z
$R_Z = 6370$ km i odległo
$d = 384\,000$ km?

7.2.16. W trapez prost
o polu 3136. Wyznacz

7.2.17. Cięciwa okręgu
wyznacza pewien kąt ś

7.2.18. Oblicz pole t
$d = 41$ tworzy z krótszą

7.2.19. Oblicz miarę k

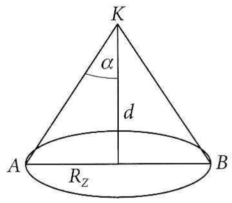
7.2.20. Samuel i Macie
cjach Europejskich Dn
wował nadlatującego ry
W tym samym czasie Sa
zobaczył tego rybołowa
kiej wysokości leciał ry

7.2.21. Wioślarz chcia
najkrótszą drogą przez
względu na prąd wody
zamierzonego kierunku
Z jaką prędkością płyni

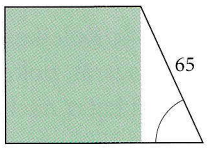
7.2.13. Stosunek długości ramion trapezu prostokątnego jest równy 1 : 2. Miara kąta rozwartego tego trapezu jest:
A. mniejsza od 120°; B. równa 120°; C. równa 150°; D. większa od 150°.

7.2.14. Drabina opiera się o ścianę i tworzy z nią kąt 20°. Podstawa drabiny znajduje się w odległości 1,5 m od ściany. Drabina opiera się o ścianę na wysokości:
A. 4,12 m; B. 5,4 m; C. 4,39 m; D. 1,6 m.

7.2.15. Jaki jest kąt paralaksy α Księżyca (K) widzianego z punktu A na Ziemi, jeśli promień Ziemi jest równy $R_Z = 6370$ km i odległość Księżyca od środka Ziemi jest równa $d = 384\,000$ km?



7.2.16. W trapez prostokątny o ramieniu 65 wpisano kwadrat o polu 3136. Wyznacz miary kątów ostrych tego trapezu.

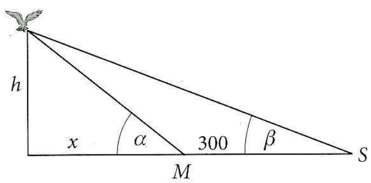


7.2.17. Cięciwa okręgu, której długość stanowi 25% długości promienia tego okręgu, wyznacza pewien kąt środkowy. Wyznacz miarę tego kąta.

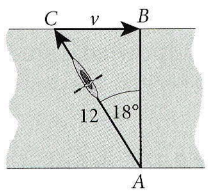
7.2.18. Oblicz pole trapezu równoramiennego, w którym przekątna o długości $d = 41$ tworzy z krótszą podstawą kąt 25°.

7.2.19. Oblicz miarę kąta ostrego rombu, którego przekątne mają długości 6 i 14.

7.2.20. Samuel i Maciej uczestniczyli w obserwacjach Europejskich Dni Ptaków. Maciej zaobserwował nadlatującego rybołowa pod kątem $\alpha = 26°$. W tym samym czasie Samuel, stojąc o 300 m dalej, zobaczył tego rybołowa pod kątem $\beta = 11°$. Na jakiej wysokości leciał rybołów?

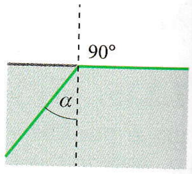


7.2.21. Wioślarz chciałby dopłynąć z punktu A do punktu B najkrótszą drogą przez rzekę. Płynie z prędkością 12 km/h. Ze względu na prąd wody kieruje się pod kątem 18° w stosunku do zamierzonego kierunku płynięcia.
Z jaką prędkością płynie woda w rzece?



7.2.22. Z punktu obserwacyjnego w latarni morskiej obserwator widzi płynący wprost w jego kierunku statek. Najpierw obserwator zobaczył statek pod kątem depresji równym 23°. Po jakimś czasie zobaczył statek pod kątem depresji równym 36°. Oblicz odległość, jaką przebył statek w czasie między tymi obserwacjami, jeżeli obserwator znajdował się na wysokości 70 m nad poziomem morza.

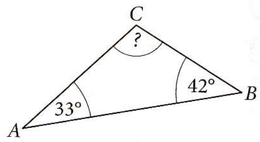
7.2.23. Prawo załamania ma postać: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$, gdzie α to kąt padania, β – kąt załamania, n_2 – współczynnik załamania ośrodka rzadszego, n_1 – współczynnik załamania ośrodka gęstszego. Współczynnik załamania wody wynosi $n_1 = \frac{4}{3}$, $n_2 = 1$. Pod jakim kątem musi padać światło, aby kąt załamania wyniósł 90° (kąt graniczny)?



7.2.24. Kolejka linowa Aeri de Montserrat w Katalonii, prowadząca na Wzgórze Montserrat, pokonuje na drodze długości 1350 m różnicę wzniesień 544 m. Jaki jest średni kąt α nachylenia lin do poziomu?

A. $\alpha < 23°$; B. $23° < \alpha < 24°$; C. $24° < \alpha < 26°$; D. $\alpha > 26°$.

7.2.25. W trójkącie ABC dane są $|\sphericalangle BAC| = 33°$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 42°$. Oblicz $\sin |\sphericalangle ACB|$.



Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

7.2.1. Z twierdzenia Pitagorasa oblicz długość drugiej przyprostokątnej: $(4\sqrt{3})^2 + b^2 = 64$. Wynika stąd, że $b = 4$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

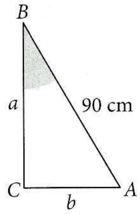
Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

7.2.2. Z definicji funkcji sinus w trójkącie prostokątnym wiesz, że $\sin\alpha = \frac{h}{84}$. Przekształć wzór, a otrzymasz $h = 84\sin\alpha$.
Odpowiedź: a) $h = 52{,}92$; b) $h = 11{,}34$; c) $h = 0{,}84$; d) $h = 70$.

7.2.3. Oblicz połowę długości podstawy trójkąta, wykorzystując definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym: $\cos\alpha = \dfrac{a}{65} \Rightarrow a = 65\cos\alpha$.

Odpowiedź:
a) $2a = 58{,}5$; b) $2a = 126{,}75$; c) $2a = 91{,}91$.

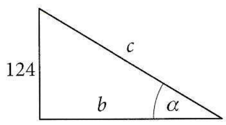
7.2.4. $\dfrac{b}{90} = \sin\alpha$, więc $b = 76{,}5$ cm. Długość a wyznacz, stosując twierdzenie Pitagorasa: $a = 47{,}41$. Pole $P = \dfrac{1}{2}ab$.



Odpowiedź: $P = 1813{,}43\ \text{cm}^2$.

7.2.5. Oznacz $|BC| = a$. Z definicji funkcji tangens uzyskasz $a = 18{,}4 \cdot \text{tg}\,41°$.
Odczytaj w tablicach wartość $\text{tg}\,41° = 0{,}8693$ i wyznacz $a \approx 16$.
Długość trzeciego boku oblicz, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $c = 24{,}38$.
Odpowiedź: Obwód trójkąta jest równy L = 58,78.

7.2.6. $\sin\alpha = 0{,}4539$, więc $\dfrac{124}{c} = 0{,}4539$.



Wylicz stąd długość c: $c \approx 273{,}2$. Z twierdzenia Pitagorasa oblicz długość b. Znając wartość sinusa, odczytaj z tablic miarę kąta α. Drugi kąt ostry ma miarę $90° - \alpha$.
Odpowiedź: $b = 243{,}44$, $c = 273{,}2$, $\alpha = 27°$, $\beta = 63°$.

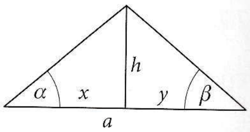
7.2.7. Stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta do długości przeciwprostokątnej tego trójkąta to cosinus tego kąta. Zatem $\dfrac{r}{R} = \cos\alpha$.

$r = R \cdot \cos\alpha$.
Odpowiedź: Równoleżnik ten ma promień równy 3185 km.

7.2.8. Zastosuj tw. Pitagorasa najpierw do trójkąta ABE:
$|BE|^2 = |AE|^2 + |AB|^2 \Rightarrow |BE|^2 = 148$. Ponowne zastosuj twierdzenia Pitagorasa, tym razem do trójkąta BCE. Pozwoli Ci to obliczyć $|CE|^2$. $|CE|^2 = 157$. Jeśli jeszcze raz zastosujesz twierdzenie Pitagorasa – tym razem w trójkącie CDE, to otrzymasz długość odcinka CD.
$|CD| = \sqrt{157 - 32} = 5\sqrt{5}$. Wyznacz $\text{tg}\,\alpha$ na podstawie definicji. Obliczoną wartość podstaw do danego wyrażenia: $\text{tg}\,\alpha = 0{,}625\sqrt{10}$, więc $\text{tg}^2\alpha = \dfrac{125}{32}$.

Odpowiedź: $w = 0{,}3$.

7.2.9. Wykorzystaj definicję funkcji tangens w obu trójkątach, na które wysokość danego trójkąta go podzieliła: $\frac{h}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ i $\frac{h}{y} = \operatorname{tg}\beta$, więc $h = 0{,}75x$ i $h = 3y$.



Jeżeli $3y = 0{,}75x$, to $y = 0{,}25x$. Wiesz, że $x + y = 16$, więc $1{,}25x = 16$, a zatem $x = 12{,}8$.

Oblicz $h = 9{,}6$ i pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 9{,}6$.

Odpowiedź: $P = 76{,}8$.

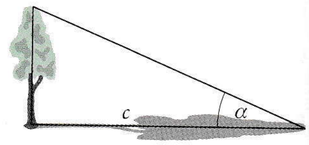
7.2.10. Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AB| \cdot \sin 135°$. Wykorzystaj wzór redukcyjny $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. Wynika z niego, że $\sin 135° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Odpowiedź: $P = 54\sqrt{2}$.

7.2.11. Aby wyznaczyć kąt, zastosuj definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym: $\sin\alpha = \frac{1{,}6}{10} = 0{,}16$. Sprawdź w tablicach, jaki to kąt.

Odpowiedź: Wahadło nie może się wychylić więcej niż o $9°12'$.

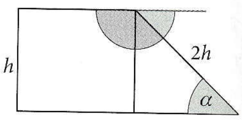
7.2.12. Sporządź dla ułatwienia rysunek.



Oznacz literą h wysokość drzewa. Wtedy $\frac{h}{c} = \operatorname{tg}\alpha$, więc $h = c \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

a) $h = 27$ m; b) $h = 9$ m; c) $h = 25{,}6$ m; d) $h = 10{,}36$ m; e) $h = 6{,}93$ m.

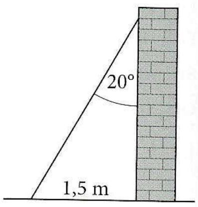
7.2.13. Wykonaj rysunek z oznaczeniami. Zauważ, że $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.
Zatem kąt $\alpha = 30°$.
Odpowiedź: C.



7.2.14. Wykonaj szkic i zaznacz na nim dane.

$\frac{1{,}5}{h} = \operatorname{tg} 20°$, więc $h = \frac{1{,}5}{\operatorname{tg} 20°}$. Znajdź w tablicach tg 20°.

Odpowiedź: A.



7.2.15. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_Z}{d} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}0166$. Gdy sprawdzisz w tablicach, jaki to kąt, okaże się, że jest on trochę mniejszy niż 1°.

7.2.16. Jeżeli kwadrat n

$\sin\alpha = \frac{56}{65} \approx 0{,}8615$

Odpowiedź: $\alpha \approx 59°$.

7.2.17. Wykonaj rysun
nowiący połowę trójk
i $|AC| = 0{,}5|AB| = 0{,}12$
ra kąta BSA jest równa

$\sin\alpha = \frac{0{,}125r}{r} = 0{,}125$

go sinus ma taką warto
Odpowiedź: Około 14

7.2.18. Zauważ, że kąt

Zatem $\frac{h}{41} = \sin 25°$ i

$h = 41 \cdot 0{,}4226 = 17{,}33$

Pole trapezu, obliczysz

Trapez jest równorami

$P = \frac{b + 2x + b}{2} \cdot h = \frac{2b}{}$

Odpowiedź: Pole trape

7.2.19. Rozważ np. trójk
kąta ABS literą α.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7} = 2{,}33$. Odczyt

$\alpha \approx 23°$. Kąt ostry romb
Odpowiedź $2\alpha \approx 46°$.

7.2.20. Oznacz literą h –
x – odległość od spodk

Wtedy $\frac{h}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ i $\frac{h}{x+3}$

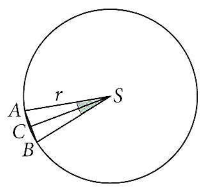
W tablicach znajdziesz
te wartości i porównas
$0{,}2933x = 58{,}32$.
Wylicz $x = 198{,}84$ i $h =$
Odpowiedź: Rybołów l

7.2.16. Jeżeli kwadrat ma pole 3136, to jego bok $h = 56$.

$\sin\alpha = \dfrac{56}{65} \approx 0{,}8615$

Odpowiedź: $\alpha \approx 59°$.

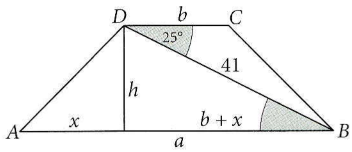
7.2.17. Wykonaj rysunek. Rozważ trójkąt prostokątny, stanowiący połowę trójkąta ASB. W tym trójkącie $|AS| = r$ i $|AC| = 0{,}5|AB| = 0{,}125r$. Jeśli kąt CSA ma miarę α, to miara kąta BSA jest równa 2α.



$\sin\alpha = \dfrac{0{,}125r}{r} = 0{,}125$. Odczytaj z tablic miarę kąta, którego sinus ma taką wartość. $\alpha \approx 7°$. Zatem $2\alpha \approx 14°$.

Odpowiedź: Około 14°.

7.2.18. Zauważ, że kąt ABD też ma miarę 25°.



Zatem $\dfrac{h}{41} = \sin 25°$ i $\dfrac{b+x}{41} = \cos 25°$.

$h = 41 \cdot 0{,}4226 = 17{,}33$ i $b + x = 37{,}16$

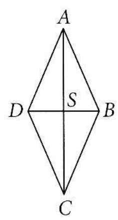
Pole trapezu, obliczysz ze wzoru $P = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

Trapez jest równoramienny, więc $a = b + 2x$. Podstaw to do wzoru na pole:

$$P = \frac{b+2x+b}{2} \cdot h = \frac{2b+2x}{2} \cdot h = \frac{2(b+x)}{2} \cdot h = (b+x) \cdot h.$$

Odpowiedź: Pole trapezu jest równe 643,98.

7.2.19. Rozważ np. trójkąt SAB. W tym trójkącie oznacz miarę kąta ABS literą α.



$|BD| = 14$
$|AC| = 6$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{7} = 2{,}33$. Odczytaj z tablic (kalkulatora) wartość kąta α.

$\alpha \approx 23°$. Kąt ostry rombu jest dwa razy większy.

Odpowiedź $2\alpha \approx 46°$.

7.2.20. Oznacz literą h – wysokość, na której leciał rybołów w momencie obserwacji, x – odległość od spodka tej wysokości do miejsca, w którym stał Maciej.

Wtedy $\dfrac{h}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ i $\dfrac{h}{x+300} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 26°$ i $h = x \cdot \operatorname{tg} 11° + 300 \cdot \operatorname{tg} 11°$.

W tablicach znajdziesz wartość $\operatorname{tg} 26° = 0{,}4877$ i $\operatorname{tg} 11° = 0{,}1944$. Gdy podstawisz te wartości i porównasz oba wzory, to otrzymasz: $0{,}4877x = 0{,}1944x + 58{,}32$, czyli $0{,}2933x = 58{,}32$.

Wylicz $x = 198{,}84$ i $h = 96{,}97$.

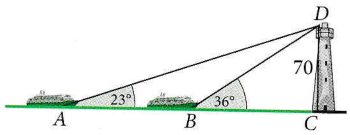
Odpowiedź: Rybołów leciał na wysokości 96,97 m.

7.2.21. Literą v oznaczono na rysunku prędkość prądu rzeki. Wykorzystaj funkcję sinus.

W tym przypadku $\sin 18° = \frac{v}{12} \Rightarrow v = 12 \cdot \sin 18° = 3{,}7$.

Odpowiedź: Prąd rzeki ma prędkość 3,7 km/h.

7.2.22. Na rysunku dla ułatwienia oznaczono literami A i B kolejne położenia statku, literą D – położenie obserwatora. Oznacz $x = |AB|$. Poza tym wiesz, że $|BC| = 70$.



W trójkącie ABC: $\operatorname{tg} 23° = \frac{70}{|AC|}$. Zatem $|AC| = \frac{70}{\operatorname{tg} 23°}$. Odczytaj z tablic wartość $\operatorname{tg} 23°$ i oblicz $|AC|$. Stąd $|AC| \approx 164{,}9$ m. W trójkącie BCD: $\operatorname{tg} 36° = \frac{70}{|BC|}$, a więc $|BC| = \frac{70}{\operatorname{tg} 36°}$. Odczytaj $\operatorname{tg} 36°$ z tablic i oblicz $|BC|$. Zatem $|BC| = 96{,}35$ m. Oblicz x.

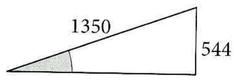
$x = |AC| - |BC| = 164{,}9 \text{ m} - 96{,}35 \text{ m} = 68{,}55 \text{ m}$

Odpowiedź: W czasie między obserwacjami statek przepłynął odległość 68,55m.

7.2.23. Podstaw podane w treści zadania wartości: $\frac{\sin\alpha}{\sin 90°} = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = 0{,}75$.

Odpowiedź: $\alpha \approx 48°35'$.

7.2.24. Skorzystaj z funkcji sinus: $\sin\alpha = \frac{544}{1350}$.



$\sin\alpha \approx 0{,}4029$. Sprawdź w tablicach, jakiemu kątowi odpowiada ta wartość: $23° < \alpha < 24°$.

Odpowiedź: B.

7.2.25. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°. Zatem $|\sphericalangle ACB| = 180° - (|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC|) = 180° - 75°$.

$\sin(180° - 75°) = \sin 75°$

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Zestaw z

1. Jeżeli $\sin\alpha = \frac{28}{53}$, t

A. $\cos\alpha = \frac{28}{45}$ B

2. Wyznacz cosinus k

A. $\cos\alpha = \frac{3}{4\sqrt{2}}$; B

3. W trójkącie prosto
$|AB| = 277$ cm i sinus
ABC jest równe:
A. 14 490 cm²; B

4. W trójkącie ABC
i $|AB| = 432$, to pole te
A. 122 000; B

5. Drzewo, którego cie
$\alpha = 54°$, ma wysokość
A. 17,64 m; B

6. Rowerzysta na drod
średni kąt α nachyleni
A. 18°; B.

7. Wyznacz sinus więk
kątnych: $a = 28$, $b = 19$

A. $\frac{28}{195}$; B.

8. Wiadomo, że $\sin\alpha$ =

$3\sin(180° - \alpha) + 4\cos($

A. $\frac{-7}{5}$; B.