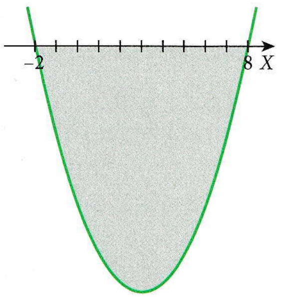


$-2 < x < 8$

Na podstawie szkicu wykresu funkcji kwadratowej odczytaj rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych. Ze zbioru liczb spełniających nierówność wybierz teraz liczby naturalne.

Odpowiedź: Są to wyrazy o numerach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

6.1.11. Rozważ funkcję $f(x) = 2x^2 - 24x + 40$, która przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = \frac{-b}{2a}$, gdy jest określona na zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ i $f(6) = -32$.
Jeżeli szukasz najmniejszej wartości funkcji w przedziale, to musisz sprawdzić także, jakie są wartości funkcji na jego końcach. W tym wypadku szukasz najmniejszej wartości ciągu, czyli funkcji określonej na zbiorze liczb naturalnych dodatnich. Oblicz wartość funkcji $f(1) = 18$. Gdy powrócisz do zbioru liczb naturalnych, to funkcja $f(n) = a_n$ przyjmuje najmniejszą wartość -32 dla $n = 6$.
Odpowiedź: Najmniejszą wartość przyjmuje wyraz szósty.

6.1.12.
a) $S_n = 2n^2 + 3n \Rightarrow S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$, $S_3 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 = 27$
b) $S_n = -n^2 + 2n \Rightarrow S_1 = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$, $S_3 = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$
c) $S_n = 4n^2 - 2n \Rightarrow S_1 = 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 2$, $S_3 = 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 30$
d) $S_n = 0{,}04n^2 + 3{,}2n \Rightarrow S_1 = 0{,}04 \cdot 1^2 + 3{,}2 \cdot 1 = 3{,}24$ i $S_3 = 0{,}04 \cdot 3^2 + 3{,}2 \cdot 3 = 9{,}96$

6.2. Ciągi arytmetyczne

6.2.1. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, jeśli:
a) $a_1 = 5, r = -1$;
b) $a_1 = 4, r = 3$;
c) $a_1 = 2, r = -0{,}5$;
d) $a_1 = 3, r = -2{,}5$;
e) $a_1 = -4, r = 2$;
f) $a_5 = 8, r = 3{,}1$;
g) $a_4 = 7, r = -5$;
h) $a_2 = 2, r = -\sqrt{2}$;
i) $a_3 = -2, r = 2 + \sqrt{3}$;
j) $a_6 = 12\pi, r = 3\pi$.

6.2.2. Wyznacz r i ósmy wyraz ciągu.

a) $2, 6, 10, 14, \ldots$ b) $16, 13, 10, 7, \ldots$ c) $6,\ 5{,}7,\ 5{,}4,\ 5{,}1,\ \ldots$

d) $\sqrt{2}-8, \sqrt{2}-3, \sqrt{2}+2, \ldots$ e) $-5, -8, -11, -14, \ldots$ f) $0{,}5,\ 1{,}5,\ 2{,}5,\ 3{,}5,\ \ldots$

g) $4, 4-\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3}, 4-3\sqrt{3}, \ldots$

6.2.3. Wyznacz pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego, jeśli:

a) $a_{16}=21, r=2$; b) $a_{11}=120, r=3$; c) $a_4=-1{,}5, r=-1{,}5$;

d) $a_{21}=4, r=-3$; e) $a_{44}=22{,}5, r=0{,}5$; f) $a_6=100\frac{1}{3}, r=\frac{2}{3}$;

g) $a_7=16{,}5, r=0{,}4$; h) $a_8=-14, r=-0{,}3$.

6.2.4. Krzysztof w dziesiątym, ostatnim dniu sezonu grzybowego zebrał 24 kg grzybów. Ile grzybów zebrał Krzysztof pierwszego dnia, jeśli wiadomo, że każdego poprzedniego dnia zbierał o 1 kg grzybów mniej? Ile grzybów Krzysztof zebrał w ciągu całego sezonu?

6.2.5. Jeśli w ciągu arytmetycznym $a_3=4$ i $a_5=28$, to:

A. $a_4=8$; B. $a_4=12$; C. $a_4=16$; D. $a_4=20$.

6.2.6. Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Oblicz c, jeśli:

a) $a=2, b=-2$; b) $a=-2, b=0$; c) $a=8{,}5, b=3{,}5$; d) $a=-14, b=4$.

6.2.7. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego, w którym:

a) $a_1=2, a_7=10$; b) $a_1=3, a_5=-5$; c) $a_5=19, a_9=35$; d) $a_4=13, a_{10}=7$.

6.2.8. Napisz 11 wyraz ciągu arytmetycznego, w którym dwa pierwsze wyrazy są równe:

a) $9{,}2$ i $7{,}6$; b) $1+\sqrt{2}$ i 2; c) 16 i 12; d) 40 i 37.

6.2.9. Zbadaj, czy ciąg jest arytmetyczny, gdy $a_n=\dfrac{3n-4}{3}$.

6.2.10. Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

A. $3, 13, 23, \ldots$ B. $3, 33, 333, \ldots$ C. $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots$ D. $3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$

6.2.11. Zbadaj, czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{1}{5}(4n-7)$ jest ciągiem arytmetycznym.

6.2.12. Długości bok
o różnicy 6. Wykaż, że

6.2.13. Jakie wartości
tycznym?
A. $x=-6$ i $y=8$; B

6.2.14. Uzasadnij, że
$a_n=a(n+b)^2-an^2$ dl

6.2.15. W ciągu arytm

6.2.16. W ciągu arytm

6.2.17. Napisz trzy p
i $a_6=60$.

6.2.18. Liczby a, 65, b
metyczny o różnicy 2

6.2.19. W ciągu aryt
od 90?

6.2.20. Wartość wie
Oblicz czas, w ciągu
jeżeli wiadomo, że po
wartość po 25 latach.

6.2.21. Uzasadnij, że
wyrazami ciągu arytm

6.2.22. Oblicz sumę
a) $2, 5, 8, \ldots$
d) $7, 5, 3, \ldots$

6.2.23. W ciągu aryt
A. $n=6$ i $S_n=18$;

6.2.24. Suma n p
$S_n=4n^2+6n$. Zbadaj

6.2.12. Długości boków pewnego trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 6. Wykaż, że pole koła wpisanego w ten trójkąt jest równe $P = 36\pi$.

6.2.13. Jakie wartości powinny mieć x i y, aby ciąg x, 2, y, 18 był ciągiem arytmetycznym?
A. $x = -6$ i $y = 8$; B. $x = -12$ i $y = 10$; C. $x = -6$ i $y = 10$; D. $x = -12$ i $y = 8$.

6.2.14. Uzasadnij, że ciąg (a_n), którego n-ty wyraz określony jest wzorem $a_n = a(n + b)^2 - an^2$ dla dowolnie wybranych liczb a i b, jest ciągiem arytmetycznym.

6.2.15. W ciągu arytmetycznym $a_{119} + a_{125} = 98$. Oblicz a_{122}.

6.2.16. W ciągu arytmetycznym $a_4 = 3$ i $a_{18} = 31$. Oblicz a_{19}, a_3.

6.2.17. Napisz trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, w którym: $a_4 = 36$ i $a_6 = 60$.

6.2.18. Liczby a, 65, b ($a > 0$, $b > 0$) są tak dobrane, że ich kwadraty tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2016. Oblicz a i b. Czy liczby a, 65, b tworzą ciąg arytmetyczny?

6.2.19. W ciągu arytmetycznym $a_3 = 5$; $a_6 = 20$. Ile wyrazów ciągu jest mniejszych od 90?

6.2.20. Wartość wiertarki w kolejnych latach tworzy ciąg arytmetyczny malejący. Oblicz czas, w ciągu którego wiertarka całkowicie straci wartość (zamortyzuje się), jeżeli wiadomo, że po 15 latach użytkowania jej wartość będzie 3 razy większa niż jej wartość po 25 latach.

6.2.21. Uzasadnij, że jeśli miary kątów wewnętrznych pewnego trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to jeden z tych kątów ma miarę 60°.

6.2.22. Oblicz sumę 6 początkowych wyrazów ciągu:
a) 2, 5, 8, ... b) −4, 0, 4, ... c) −5, −1, 3, ...
d) 7, 5, 3, ... e) 5,3, 5,1, 4,9, ... f) 7, −12, −31, ...

6.2.23. W ciągu arytmetycznym $a_1 = -5$, $a_n = 11$, $r = 2$. Oblicz n i S_n.
A. $n = 6$ i $S_n = 18$; B. $n = 7$ i $S_n = 21$; C. $n = 8$ i $S_n = 24$; D. $n = 9$ i $S_n = 27$.

6.2.24. Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu dana jest wzorem $S_n = 4n^2 + 6n$. Zbadaj, czy jest to ciąg arytmetyczny.

6.2.25. Suma 13 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego początkowe trzy wyrazy to: 21, $13\frac{1}{2}$, 6, wynosi:

A. -69; B. -312; C. 111; D. 858.

6.2.26. Tadeusz, jadąc na rowerze, w ciągu pierwszej godziny przejechał 25 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,8 km krótszy od poprzedniego. Jaką drogę pokonał Tadeusz, jeśli w ciągu ostatniej godziny przejechał 21 km?

6.2.27. Oblicz sumę czterdziestu kolejnych dodatnich wielokrotności liczby 7, zaczynając od najmniejszej.

6.2.28. Niektóre wielokąty o n bokach mają taką własność, że miary ich kątów wewnętrznych tworzą ciąg arytmetyczny. Ile boków ma taki wielokąt, jeżeli najmniejszy jego kąt ma miarę 70°, a największy 170°? Podaj miary kątów tego wielokąta.

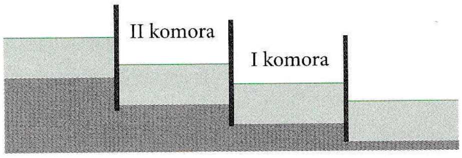
6.2.29. Oblicz sumę liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 7.

6.2.30. W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym $a_5 = 25$. Oblicz sumę tego ciągu.

6.2.31. Ze wzgórza toczy się piłka, pokonując 3 metry w pierwszej sekundzie, a w każdej następnej o 7 metrów więcej niż w poprzedniej. Jaką drogę pokona, jeśli stoczy się ze wzgórza w czasie 10 sekund?

6.2.32. Wyznacz n-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym suma wszystkich wyrazów, z wyjątkiem pierwszego, jest równa 35, suma wszystkich wyrazów, z wyjątkiem ostatniego, jest równa 65, zaś różnica między jego dziewiątym a piątym wyrazem jest równa (-12).

6.2.33. Największa śluza na polskim odcinku Kanału Augustowskiego – śluza Paniewo – służy do pokonania prawie siedmiometrowej różnicy poziomów. Jest to śluza dwukomorowa. Statki i kajaki płynące w stronę Augustowa, aby wznieść się na wyższy odcinek kanału wpływają najpierw do pierwszej komory. Przez zastawki w środkowych wrotach znajdujących się między komorami wlewa się woda z drugiej komory do pierwszej, aż poziom wody między dwiema komorami się wyrówna. Potem wrota są zamykane, a przez zastawki we wrotach oddzielających górną część kanału od drugiej komory wlewa się woda, aż do momentu wyrównania poziomu między drugą komorą a górnym odcinkiem Kanału Augustowskiego. Wtedy wrota są otwierane i statki, łodzie lub kajaki mogą płynąć dalej.



Różnica poziomów wody między drugą a pierwszą komorą wynosiła 320 cm. W każdej minucie poziom wody w II komorze obniżał się o 32 cm. Równocześnie poziom wody w I komorze w każdej minucie podnosił się o 32 cm. Po ilu minutach poziom wody w obu komorach się wyrówna?

6.2.34. W sierpniu 2015 roku w czasie suszy w Zbiorniku Goczałkowickim ilość wody osiągnęła stan 160 000 000 m^3. Codziennie parowało 300 000 m^3 wody. Zakładając, że tendencja by się utrzymała, ile dni zajęłoby przekroczenie stanu krytycznego zbiornika wynoszącego 80 000 000 m^3 wody?

6.2.35. Sylwek z Adamem chcą dla młodszych dzieci urządzić zawody w strzelaniu z łuku do tarczy. Przygotowują tarczę, rysując na kartonie współśrodkowe okręgi, z których pierwszy ma średnicę 10 cm, a ostatni 55 cm. Oblicz średnice pozostałych ośmiu okręgów, jeśli odstępy między nimi są jednakowe.

6.2.36. Kevin spłacił kredyt w wysokości 5640 zł w dwunastu ratach, z których każda była mniejsza od poprzedniej o 60 zł. Ile wynosiła pierwsza, a ile ostatnia rata?

6.2.37. Dając do kasy oszczędności w każdym miesiącu o 50 zł więcej niż w poprzednim, uzbieramy po n miesiącach 7600 zł. Oblicz liczbę miesięcy n, jeżeli pierwszy wkład wynosił 100 zł.

6.2.38. Między liczby -2 i 18 wstaw siedem liczb tak, aby tworzyły one ciąg arytmetyczny.

6.2.39. Ola przeczytała książkę w ciągu 7 dni, przy czym każdego dnia czytała o taką samą liczbę stron więcej niż w dniu poprzednim. Ile stron miała książka, jeśli wiadomo, że w drugim dniu Ola przeczytała 46 stron, a w ostatnim 106?

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

6.2.1.

a) $a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = 3, a_4 = 2;$
b) $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10, a_4 = 13;$
c) $a_1 = 2, a_2 = 1{,}5, a_3 = 1, a_4 = 0{,}5;$
d) $a_1 = 3, a_2 = 0{,}5, a_3 = -2, a_4 = -4{,}5;$
e) $a_1 = -4, a_2 = -2, a_3 = 0, a_4 = 2;$
f) $a_1 = -4{,}4, a_2 = -1{,}3, a_3 = 1{,}8, a_4 = 4{,}9;$
g) $a_1 = 22, a_2 = 17, a_3 = 12, a_4 = 7;$
h) $a_1 = 2 + \sqrt{2}, a_2 = 2, a_3 = 2 - \sqrt{2}, a_4 = 2 - 2\sqrt{2};$
i) $a_1 = -6 - 2\sqrt{3}, a_2 = -4 - 4\sqrt{3}, a_3 = -2, a_4 = \sqrt{3};$
j) $a_1 = -3\pi, a_2 = 0, a_3 = 3\pi, a_4 = 6\pi.$

6.2.2.

a) $a_8 = 30, r = 4;$ b) $a_8 = -5, r = -3;$ c) $a_8 = 3{,}9, r = -0{,}3;$
d) $a_8 = 27 + \sqrt{2}, r = 5;$ e) $a_8 = -26, r = -3;$ f) $a_8 = 7{,}5, r = 1;$
g) $a_8 = 4 - 7\sqrt{3}, r = -\sqrt{3}.$

6.2.3.

a) $a_{16} = 21, r = 2 \Rightarrow a_1 = 21 - 15 \cdot 2 = -9;$
b) $a_{11} = 120, r = 3 \Rightarrow a_1 = 120 - 10 \cdot 3 = 90;$
c) $a_4 = -1{,}5, r = -1{,}5 \Rightarrow a_1 = -1{,}5 - 3 \cdot (-1{,}5) = 6;$
d) $a_{21} = 4, r = -3 \Rightarrow a_1 = 4 - 20 \cdot (-3) = 64;$
e) $a_{44} = 22{,}5, r = 0{,}5 \Rightarrow a_1 = 22{,}5 - 43 \cdot 0{,}5 = 1;$
f) $a_6 = 100\frac{1}{3}, r = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = 100\frac{1}{3} - 5 \cdot \frac{2}{3} = 97;$
g) $a_7 = 16{,}5, r = 0{,}4 \Rightarrow a_1 = 16{,}5 - 6 \cdot 0{,}4 = 14{,}1;$
h) $a_8 = -14, r = -0{,}3 \Rightarrow a_1 = -14 - 7 \cdot (-0{,}3) = 0 - 11{,}9.$

6.2.4. Masa grzybów zebranych pierwszego dnia sezonu to pierwszy wyraz ciągu a_1. Masa grzybów zebranych dziesiątego dnia to dziesiąty wyraz ciągu $a_{10} = a_1 + 9r$, gdzie $r = 1$. Podstaw dane i rozwiąż otrzymane równanie: $24 = a_1 + 9 \Rightarrow a_1 = 15$. Aby obliczyć łączną liczbę kilogramów grzybów zebranych w ciągu całego sezonu, wykorzystaj wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$.
$S_{10} = 0{,}5 \cdot 39 \cdot 10 = 195.$
Odpowiedź: Krzysztof pierwszego dnia zebrał 15 kg grzybów, a w ciągu całego sezonu 195 kg.

6.2.5. Wyraz a_4 leży do
stać z własności ciągu
Odpowiedź: C.

6.2.6. a) $c = -6$; b) $c =$

6.2.7. Oblicz różnicę c
a) $6r = 10 - 2; r = \frac{4}{3}$; b

6.2.8. a) $a_{11} = -6{,}8$; b)

6.2.9. Oblicz wyraz na
różnica między wyra
$a_{n+1} - a_n = \frac{3n-1}{3} - $ 3
Odpowiedź: Jest to ci

6.2.10. Ciąg arytmety
nie jest równe 33 – 3,
Odpowiedź: Ciągi ar

6.2.11.

$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left[4(n+1) - 7\right.$

$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{5}n - 0{,}6$ -

Różnica jest równa r
jest arytmetyczny.

6.2.12. Oznacz długoś
koła – R.
Skorzystaj z twierdz
boków trójkąta, i z z
wyznaczyć promień
Możesz też skorzyst
w trójkąt prostokątn
okręgu wpisanego w
Długości boków trój

6.2.5. Wyraz a_4 leży dokładnie w środku między wyrazami a_3 i a_5. Można więc skorzystać z własności ciągu arytmetycznego $a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}$.
Odpowiedź: C.

6.2.6. a) $c = -6$; b) $c = 2$; c) $c = -1{,}5$; d) $c = 22$.

6.2.7. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego, w którym:
a) $6r = 10 - 2$; $r = \frac{4}{3}$; b) $4r = -5 - 3$; $r = -2$; c) $4r = 35 - 19$; $r = 4$; d) $6r = 7 - 13$; $r = -1$.

6.2.8. a) $a_{11} = -6{,}8$; b) $a_{11} = 11 - 9\sqrt{2}$; c) $a_{11} = -24$; d) $a_{11} = 10$.

6.2.9. Oblicz wyraz następny. $a_{n+1} = \frac{3(n+1) - 4}{3} = \frac{3n - 1}{3}$. Ciąg jest arytmetyczny, jeśli różnica między wyrazem następnym a danym jest stała. Oblicz tę różnicę.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n-1}{3} - \frac{3n-4}{3} = \frac{3n - 1 - 3n + 4}{3} = 1.$$

Odpowiedź: Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy 1.

6.2.10. Ciąg arytmetyczny ma stałą różnicę. A. 13 – 3 jest równe 23 – 13, B. 333 – 33 nie jest równe 33 – 3, C. $3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$, D. $3\sqrt{3} - 3$ nie jest równe $9 - 3\sqrt{3}$.
Odpowiedź: Ciągi arytmetyczne to A i C.

6.2.11.

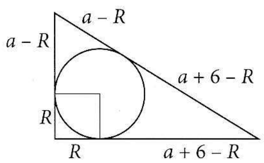
$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left[4(n+1) - 7\right] = \frac{4}{5}n - 0{,}6$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{5}n - 0{,}6 - \frac{4}{5}n + 1{,}4 = 0{,}8$$

Różnica jest równa $r = 0{,}8$, zatem ciąg jest arytmetyczny.

Ciąg jest arytmetyczny, gdy różnica między kolejnym a danym wyrazem ciągu jest stała. Musisz najpierw wyznaczyć wyraz a_{n+1}, a następnie różnicę $a_{n+1} - a_n$.

6.2.12. Oznacz długości boków a, $a + 6$, $a + 12$, a promień koła – R.
Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć długości boków trójkąta, i z zależności widocznych na rysunku, aby wyznaczyć promień R.



Możesz też skorzystać ze wzoru $R = \frac{1}{2}(a + b - c)$ na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny albo ze wzoru na pole trójkąta z wykorzystaniem promienia okręgu wpisanego w trójkąt. ($P = p \cdot R$), gdzie p to połowa obwodu trójkąta.
Długości boków trójkąta są równe $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$.

6.2.13. W ciągu arytmetycznym każdy wyraz jest średnią arytmetyczna wyrazów sąsiednich. Pozwala to wyznaczyć najpierw $y = \frac{2+18}{2} = 10$.

Teraz można obliczyć różnicę $r = 18 - 10 = 8$.
Znając tę różnicę, wyznaczamy $x = a_1 = a_2 - r$, więc $x = 2 - 8 = -6$.
Prawdziwa jest odpowiedź C.

6.2.14. Przedstaw najpierw wyraz a_n w najprostszej postaci: $a_n = a(n^2 + 2bn + b^2) - an^2$, więc $a_n = 2abn + ab^2$. Oblicz wyraz $a_{n+1} = 2ab(n + 1) + ab^2 = 2abn + 2ab + ab^2$. Zbadaj różnicę $a_{n+1} - a_n = 2abn + 2ab + ab^2 - 2abn - ab^2 = 2ab$.
Różnica ta jest stała, zatem ciąg jest arytmetyczny.

6.2.15. Ciąg arytmetyczny ma ciekawą własność. Dowolny jego wyraz można obliczyć jako średnią arytmetyczną wyrazów znajdujących się w równych odległościach od niego. Wyraz o numerze 122 znajduje się dokładnie w środku między wyrazami 119 i 125.

Zatem $a_{122} = \frac{a_{119} + a_{125}}{2} = 49$.

Odpowiedź: $a_{122} = 49$.

6.2.16. Zauważ, że $a_{18} = a_4 + 14r$. Stąd $r = 2$; $a_{19} = a_{18} + r$, zaś $a_3 = a_4 - r$.
Odpowiedź: $a_{19} = 33$, $a_3 = 1$.

6.2.17. Skorzystaj ze wzoru na wyraz ogólny: $a_4 = a_1 + 3r$, $a_6 = a_1 + 5r$. Otrzymasz układ równań $\begin{cases} a_1 + 3r = 36 \\ a_1 + 5r = 60 \end{cases}$, z którego wyznaczysz a_1 i r. Wiedząc, że $r = 12$ i $a_1 = 0$, możesz wyznaczyć dwa kolejne wyrazy tego ciągu: $a_2 = 0 + 12 = 12$, $a_3 = 12 + 12 = 24$.
Odpowiedź: Trzy początkowe wyrazy ciągu to: 0, 12, 24.

6.2.18. Liczby a^2, 4225, b^2 tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2016, więc:
$a^2 = 4225 - 2016 = 2209$, $b^2 = 4225 + 2016 = 6241$.
Odpowiedź: $a = 47$, $b = 79$. Liczby 47, 65, 79 nie tworzą ciągu arytmetycznego.

6.2.19. Wyznacz a_1, r i a_n. $a_6 = a_3 + 3r$, więc $r = 5$. $a_1 + 2r = 5$, więc $a_1 = -5$. Możesz zapisać wzór: $a_n = -5 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 10$. Teraz wystarczy rozwiązać nierówność $5n - 10 < 90$. Jej rozwiązaniem są liczby naturalne dodatnie mniejsze od 20.
Takich liczb jest 19.
Odpowiedź: Jest 19 wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od 90.

6.2.20. Dane zadania można zapisać w postaci równania $a_{16} = 3 \cdot a_{26}$, gdzie $a_{16} = a_1 + 15r$ i $a_{26} = a_1 + 25r$. Zatem $a_1 + 15r = 3\,(a_1 + 25r)$, czyli $a_1 = -30r$. Wiertarka zamortyzuje

się, gdy $a_n = 0$. Podstaw dane do wzoru $0 = -30r + (n-1)r$. Wynika stąd, że $n - 1 = 30$ i $n = 31$.
Odpowiedź: Wyraz 31 będzie równy zero, więc wiertarka zamortyzuje się po 30 latach.

6.2.21. Załóż, że kolejne kąty trójkąta α, β, γ tworzą ciąg arytmetyczny, czyli $\beta - \alpha = \gamma - \beta$, co możesz zapisać: $-\alpha + 2\beta = \gamma$. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°, co możesz zapisać $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Jeśli dodasz do siebie te dwa równania, to otrzymasz $3\beta = 180° \Rightarrow \beta = 60°$.

6.2.22.

a) $a_6 = 17$, $S_6 = \dfrac{2+17}{2} \cdot 6 = 57$;

b) $a_6 = 16$, $S_6 = \dfrac{-4+16}{2} \cdot 6 = 36$;

c) $a_6 = 15$, $S_6 = \dfrac{-5+15}{2} \cdot 6 = 30$;

d) $a_6 = -3$, $S_6 = \dfrac{7-3}{2} \cdot 6 = 12$;

e) $a_6 = 14{,}3$, $S_6 = \dfrac{5{,}3+4{,}3}{2} \cdot 6 = 28{,}8$;

f) $a_6 = -88$, $S_6 = \dfrac{7-88}{2} \cdot 6 = -243$.

6.2.23. Gdy podstawisz dane do wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$, to otrzymasz $11 = -5 + 2(n-1)$. Stąd wyznacz n. Powinieneś otrzymać $n = 9$.

$$S_9 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot 9 \Rightarrow S_9 = 27$$

Odpowiedź: D.

6.2.24. Oblicz $S_1 = a_1 = 4 + 6 = 10$ i $S_2 = a_1 + a_2 = 28$. Masz więc ciąg o wyrazach $a_1 = 10$ i $a_2 = 18$. Podobnie możesz obliczyć S_3, które z jednej strony jest równe $28 + a_3$, a z drugiej 54. Wyznacz $a_3 = 26$. Ciąg o wyrazach: 10, 18, 26 może być ciągiem arytmetycznym o różnicy 8. Suma S_n takiego ciągu byłaby równa

$S_n = \dfrac{2 \cdot 10 + (n-1) \cdot 8}{2} = 4n^2 + 6n$, czyli tyle, ile podano w treści zadania. Dany ciąg jest więc ciągiem arytmetycznym.

Można to zbadać inaczej. Wyznacz $a_n = S_n - S_{n-1}$. Zatem

$a_n = 4n^2 + 6n - 4(n-1)^2 - 6(n-1)$

$a_n = 4n^2 + 6n - 4(n^2 - 2n + 1)^2 - 6n + 6 = 8n + 2$

$a_{n+1} = 8n + 10$, więc $a_{n+1} - a_n = 8$

Ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

6.2.25. Zauważ, że różnica tego ciągu jest ujemna i ciąg jest malejący. Już czwarty wyraz będzie ujemny, a suma początkowych trzech wyrazów jest równa 40,5. Nie ma możliwości uzyskania dodatniej sumy większej od tej wartości. Wynika stąd, że odpowiedzi C i D są niemożliwe. Spróbuj więc obliczyć wartość sumy:

$a_1 = 21$, $r = -7{,}5$, więc $a_{13} = 21 + 12 \cdot (-7{,}5) = -69$.

Suma trzynastu wyrazów tego ciągu jest równa: $S_{13} = \frac{21 - 69}{2} \cdot 13 = -312$.

Odpowiedź: B.

6.2.26. Ustal najpierw, ile godzin jechał Tadeusz. Wiadomo, że $a_1 = 25$, $r = -0,8$ i $a_n = 21$. Podstaw do wzoru na wyraz ogólny, a otrzymasz równanie $21 = 25 - 0,8(n - 1)$. Po rozwiązaniu otrzymasz $n = 6$. Tadeusz jechał 6 godzin i przejechał drogę

$S_{11} = \frac{21 + 25}{2} \cdot 6 = 138$ km.

Odpowiedź: Tadeusz przejechał 138 km.

6.2.27. $a_1 = 7$, $a_2 = 14$ itd. Różnica tego ciągu $r = 7$. Ostatni wyraz $a_{40} = 7 + 39 \cdot 7 = 280$.

Suma czterdziestu takich wyrazów to $S_{40} = \frac{7 + 280}{2} \cdot 40 = 5740$.

Odpowiedź: 5740.

6.2.28. Przypomnij sobie wyrażenie określające wartość sumy miar kątów wewnętrznych n-kąta (dla trójkąta to 180°, czworokąta – 360°, pięciokąta – 540°, n-kąta – $(n - 2) \cdot 180°$). Suma ta jest jednocześnie sumą n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$S_n = (n - 2) \cdot 180° = \frac{70° + 170°}{2} \cdot n$. Łatwo z tej zależności wyznaczysz n.

$170° = 70° + 5r$, więc $r = 20°$.

Odpowiedź: $n = 6$. Miary kątów to: 70°, 90°, 110°, 130°, 150° i 170°.

6.2.29. Najmniejszą liczbą naturalną trzycyfrową podzielną przez 7 jest 105, a największą 994. Zauważ, że $105 + 112 + 119 + \ldots + 994$ jest sumą ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 105$, $r = 7$, $a_n = 994$. Po podstawieniu danych do wzoru: $a_n = a_1 + (n - 1)r$ uzyskasz równanie z niewiadomą n: $994 = 105 + (n - 1) \cdot 7$.

Rozwiąż je i wyznacz $n = 128$. Skorzystaj ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ i oblicz sumę $S_{128} = \frac{(105 + 994)}{2} \cdot 128 = 70\,336$.

Odpowiedź: Suma liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 7 jest równa 70 336.

6.2.30.

$$\boxed{a_1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{25}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{a_9}$$

Zauważ, że w danym ciągu piąty wyraz jest wyrazem środkowym. W ciągu arytmetycznym środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów znajdujących się w jednakowej odległości od niego.

$a_5 = \frac{a_1 + a_9}{2} = \frac{a_2 + a}{2}$

Otrzymasz $\frac{a_1 + a_9}{2} =$

Zauważ, że $S_9 = \frac{(a_1 +}{2}$

6.2.31. Zauważ, że licz
mentowy ciąg arytme
wzoru $S_n = \frac{(2a_1 + (n}{2}$
Odpowiedź: Piłka po

6.2.32. Różnica międz
Jeśli sumę oznaczysz
$S - a_n = 65$. Po odjęci
wyrazem ciągu, co p
suma początkowych
a zatem cały ciąg.
Odpowiedź: 20, 16, 1

6.2.33. W obu przypa
mej liczbie wyrazów
nia poziomów w obu
$a_1 = 320$ i różnicy $r_1 =$
Skorzystaj ze wzoru
Rozwiąż równanie.
Odpowiedź: Po 5 mi

6.2.34. Jest to ciąg ar
i $a_n = 80\,000\,000$ m³.

Po rozwiązaniu otrzy

Odpowiedź: Susza m

6.2.35. Średnice okręg
ru na n-ty wyraz ciąg
Odpowiedź: 15, 20, 2

$a_5 = \dfrac{a_1 + a_9}{2} = \dfrac{a_2 + a_8}{2} = \dfrac{a_3 + a_7}{2} = \dfrac{a_4 + a_6}{2}$. Podstaw $a_5 = 25$.

Otrzymasz $\dfrac{a_1 + a_9}{2} = 25$.

Zauważ, że $S_9 = \dfrac{(a_1 + a_9)}{2} \cdot 9$. Stąd $S_9 = 25 \cdot 9 = 225$.

6.2.31. Zauważ, że liczba metrów pokonanych w kolejnych sekundach tworzy 10-elementowy ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 3 i różnicy 7. Możesz skorzystać ze wzoru $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2}$, otrzymasz $S_{10} = \dfrac{(6 + 9 \cdot 7) \cdot 10}{2} = 345$.
Odpowiedź: Piłka pokona trasę 345 metrów.

6.2.32. Różnica miedzy dziewiątym a piątym wyrazem pozwala od razu wyznaczyć r. Jeśli sumę oznaczysz przez S, to wiesz, że: $S - a_1 = 35$.
$S - a_n = 65$. Po odjęciu stronami otrzymasz zależność między pierwszym i ostatnim wyrazem ciągu, co pozwoli Ci znaleźć n. Teraz możesz skorzystać z informacji, że suma początkowych $(n - 1)$ wyrazów jest równa 65, i wyznaczyć pierwszy wyraz, a zatem cały ciąg.
Odpowiedź: 20, 16, 14, 11, 8, 5, 2, −1, −4, −7, −10.

6.2.33. W obu przypadkach masz do czynienia z ciągami arytmetycznymi o tej samej liczbie wyrazów n odpowiadającej liczbie minut, które miną do chwili wyrównania poziomów w obu komorach. Pierwszy z nich jest ciągiem malejącym o wyrazie $a_1 = 320$ i różnicy $r_1 = -32$, drugi ciąg jest rosnący i ma pierwszy wyraz $b_1 = 0$ i $r_2 = 32$. Skorzystaj ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego: $320 + (-32)n = 32n$.
Rozwiąż równanie.
Odpowiedź: Po 5 minutach.

6.2.34. Jest to ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 160\,000\,000\ \text{m}^3$, $r = -300\,000\ \text{m}^3$ i $a_n = 80\,000\,000\ \text{m}^3$. Ułóż nierówność: $160\,000\,000 + (n-1) \cdot (-300\,000) \le 80\,000\,000$.

Po rozwiązaniu otrzymasz: $n \ge 266\frac{2}{3}$.

Odpowiedź: Susza musiałaby potrwać jeszcze 267 dni.

6.2.35. Średnice okręgów tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 10$, $a_{10} = 55$. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu wyznacz r, a następnie oblicz średnice pozostałych okręgów.
Odpowiedź: 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

6.2.36. Jest to malejący ciąg arytmetyczny dwunastowyrazowy, w którym $r = -60$ i $S_n = 5640$. Trzeba obliczyć a_1 i a_{12}. Podstaw dane do wzoru na sumę ciągu arytmetycznego: $S_{12} = \dfrac{2a_1 + 11 \cdot (-60)}{2} \cdot 12$

Odpowiedź: $a_1 = 800$, $a_{12} = 140$.

6.2.37. Jest to ciąg arytmetyczny, w którym $r = 50$, $S_{n+1} = 7600$ i $a_1 = 100$. Aby obliczyć n, trzeba skorzystać ze wzoru na S_{n+1}: $7600 = \dfrac{2 \cdot 100 + n \cdot 50}{2} \cdot (n + 1)$. Po uproszczeniu i uporządkowaniu otrzymasz równanie kwadratowe: $n^2 + 5n - 300 = 0$, którego dodatnim pierwiastkiem jest $n = 15$.
Odpowiedź: Minie 15 miesięcy.

6.2.38. Masz $a_1 = -2$ i $a_9 = 18$. Łatwo obliczyć, że $r = 2{,}5$.
Odpowiedź: $a_2 = 0{,}5$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5{,}5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 11{,}5$, $a_7 = 13$ i $a_8 = 15{,}5$.

6.2.39. Jest to ciąg arytmetyczny o 7 wyrazach, w którym $a_2 = 46$ i $a_7 = 106$. Trzeba obliczyć S_7. Zauważ, że $a_7 - a_2 = 5r$. Oblicz $r = 12$ i $a_1 = 34$. Podstaw do wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
Odpowiedź: Książka miała 490 stron.

6.3. Ciągi geometryczne

6.3.1. Wyznacz piąty wyraz ciągu.

a) 300, –30, 3, ... b) 4, 20, 100, ... c) 32, 16, 8, ...

d) –54, 18, –6, ... e) $2^{x+1}, 2^{2x+1}, 2^{3x+1}, \ldots$ f) $1, \dfrac{-x}{3}, \dfrac{x^2}{9}, \ldots$

6.3.2. Wyznacz iloraz q ciągu geometrycznego, w którym:

a) $a_1 = 4,\ a_2 = 6$; b) $a_1 = -2,\ a_3 = \sqrt{2}$; c) $a_{12} = 100,\ a_{15} = 72{,}9$;

d) $a_4 = 1{,}25;\ a_7 = \dfrac{5}{108}$; e) $a_1 = \sqrt{5} + 2,\ a_3 = \sqrt{5} - 2$.

6.3.3. Dodatnie licz
Oblicz b, jeśli:

a) $a = 3, c = 27$;

c) $a = 10, c = 10^{4x-3}$;

6.3.4. W ciągu geom

6.3.5. Zbadaj, czy cią

6.3.6. Który z podan
A. 3, $(-3)^2$, $(-3)^3$, (–3
C. 3, 13, 133, ...

6.3.7. W rosnącym
ciągu wynoszą:
A. $a_1 = 2$ i $q = 2$;
C. $a_1 = 1$ i $q = 2$;

6.3.8. W 2012 roku
stępnym roku liczba
wyciętych drzew wy
A. w 2015 r.;

6.3.9. Który z podan
A. $a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$;

6.3.10. Udowodnij,
ciąg $a_n = f(n+1) - f$

6.3.11. W ciągu geo

6.3.12. Oblicz pierw
i $a_7 = 1$. Oblicz sumę

6.3.13. Oblicz sumę

a) 4; 0,4; 0,04; ...