3.1.14. Obwód to suma długości wszystkich boków. Jeśli oznaczysz obwód literą L, to:
$L = 2(5x - y) + 2y + x + 6y + 4x + 2y = 15x + 8y$.
Odpowiedź: D.

3.1.15. Pole powierzchni trapezu to połowa iloczynu jego wysokości przez sumę długości jego podstaw.

$$P = \frac{1}{2}(2a + 3)(10 - 2a + 3a + 11)$$

$$P = \frac{1}{2}(2a + 3)(a + 21) \Rightarrow P = a^2 + 22{,}5a + 31{,}5.$$

Odpowiedź: $P = a^2 + 22{,}5a + 31{,}5$.

3.2. Używanie wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$

3.2.1. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej:

a) $(x + 1)^2$; b) $(x + 2)^2$; c) $(x + 3)^2$;
d) $(x + 4)^2$; e) $(x + 5)^2$; f) $\left(\sqrt{2} + 1\right)^2$;
g) $\left(\sqrt{3} + 1\right)^2$; h) $(2x - 1)^2$; i) $(3x - 1)^2$;
j) $(-2x - 1)^2$; k) $\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2$; l) $(-2x + 5)^2$.

3.2.2. Przedstaw w postaci uporządkowanej sumy algebraicznej:

a) $(2x - 1)(2x + 1)$; b) $(-2x - 3)(-2x + 3)$;
c) $\left(5x - \sqrt{2}\right)\left(5x + \sqrt{2}\right)$; d) $\left(x^2 - 2\sqrt{2}\right)\left(x^2 + 2\sqrt{2}\right)$.

3.2.3. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$; b) $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3} + 2}$.

3.2.4. Przedstaw w postaci iloczynu:

a) $x^2 - 49$; c) $4x^2 - 9$; d) $x^2 - 8x + 16$;
e) $x^2 - 12x + 36$; f) $4x^2 - 4x + 1$; g) $x^2 + 6x + 9$.

3.2.5. Wykonaj działania i przedstaw w najprostszej postaci:
a) $(5a + 3b)^2 - (5a - 3b)^2$; b) $(4x - 3y)^2 - [(4x)^2 + (3y)^2]$.

3.2.6. Przedstaw w postaci iloczynu $(2x + 5)^2 - (x - 10)^2$.

3.2.7. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:
A. $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$; B. $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 4xy$;
C. $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2xy$; D. $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$.

3.2.8. Wyznacz ab, wiedząc, że $a + b = 11$ i $a^2 + b^2 = 101$.

3.2.9. Wyznacz $(a + b)^2$, wiedząc, że $ab = 12$ i $a^2 + b^2 = 40$.

3.2.10. Wyznacz $a^2 - b^2$, wiedząc, że $a - b = 5$ i $a + b = 11$.

3.2.11. Zapisz w najprostszej postaci: $(2x - 5)^2 - (2x + 5)^2$.
A. -50; B. 0; C. $-40x$; D. 50.

3.2.12. Jeżeli $a^2 - b^2 = 32$ i $a - b = 8$, to $a + b$ jest równe:
A. 4; B. 40; C. 24; D. 20.

3.2.13. Pole kwadratu o boku $a = 3x^2 - 0{,}1$ jest równe:
A. $3x^4 - 0{,}6x^2 + 0{,}01$; B. $9x^4 - 0{,}6x^2 + 0{,}01$;
C. $9x^4 - 0{,}01$; D. $3x^4 - 1{,}2x^2 + 0{,}01$.

3.2.14. Oblicz pole P kwadratu o boku $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

3.2.15. Wykaż, że kwadrat dowolnej liczby naturalnej jest postaci $4k$ albo $4k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

3.2.16. Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenie $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 25$.

3.2.17. Wyznacz wartość współczynnika k, dla którego wyrażenie $x^2 + (2k + 6)x + 4$ jest kwadratem pewnego dwumianu.

3.2.18. Wykonaj działania: $(5x + 1)(5x - 1) - (5x - 1)^2 - 5(x - 1)$.

3.2.19. Przedstaw w postaci iloczynu $7xa^2 - 28ax + 28x$.

3.2.20. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest o 3 dłuższa od jednej z przyprostokątnych. Druga przyprostokątna ma długość 15. Oblicz pole tego trójkąta.

3.2.21. Z kwadratowego kartonu o boku a wycięto cztery kwadraty o boku b, aby złożyć otwarte pudełko. Ile razy większa jest długość a od b, jeżeli dno pudełka zajmuje 75% powierzchni kartonu przed wycięciem narożników?

3.2.22. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej wartość wyrażenia $(x-4)^2 - x(x-8)$ jest równa 16.

3.2.23. Uzasadnij, że iloczyn dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równy kwadratowi liczby parzystej zawartej między tymi liczbami zmniejszonemu o 1.

3.2.24. Wykonaj mnożenie: $(3x-1)(3x+1)(9x^2+1)(81x^4+1)$.

3.2.25. Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równa 32. Znajdź te liczby.

3.2.26. Doprowadź do jak najprostszej postaci: $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1} + \dfrac{14-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$.

3.2.27. Wykaż, że $9x^2 + 4y^2 \geq 12xy$ dla dowolnych x, y.

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

3.2.1. Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$;
b) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$;
c) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$;
d) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$;
e) $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$;
f) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$;
g) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$;
h) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$;
i) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$;
j) $(-2x-1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$;
k) $\left(x-2\sqrt{2}\right)^2 = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$;
l) $(-2x+5)^2 = 4x^2 - 20\,x + 25$.

3.2.2. Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

a) $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$;
b) $(-2x - 3)(-2x + 3) = 4x^2 - 9$;
c) $\left(5x - \sqrt{2}\right)\left(5x + \sqrt{2}\right) = 25x^2 - 2$;
d) $\left(x^2 - 2\sqrt{2}\right)\left(x^2 + 2\sqrt{2}\right) = x^4 - 8$.

3.2.3. Pomnóż licznik i mianownik przez takie wyrażenie, aby w mianowniku można było zastosować wzór $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}-1\right)} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}^2 - 1^2\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$;

b) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)} \cdot \dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{6}$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-2\right)}{(3-4)} = 2 - \sqrt{3}$.

3.2.4.

a) $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$;
b) $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$;
c) $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$;
d) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$;
e) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$;
f) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

3.2.5.

a) $25a^2 + 30ab + 9b^2 - 25a^2 + 30ab - 9b^2 = 60ab$;
b) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 16x^2 - 9y^2 = -24xy$.

3.2.6. Zastosuj wzór na różnicę kwadratów.
Otrzymasz wtedy: $[(2x + 5) - (x - 10)][(2x + 5) + (x - 10)] = (x + 15)(3x - 5)$.

3.2.7. W trzech przypadkach trzeba przekształcić wyrażenie $(x + y)^2 + (x - y)^2$. Zastosuj wzór skróconego mnożenia, a otrzymasz właściwy wynik. Nie zapomnij o kolejności działań i nawiasach: $x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$.
Odpowiedź: D.

3.2.8. Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
Z lewej strony równości możesz podstawić 101 zamiast $a^2 + b^2$. Z prawej strony podstaw 11 za dwumian $a + b$. Otrzymasz równość: $101 + 2ab = 11^2$, z której łatwo wyznaczysz ab.
Odpowiedź: $ab = 10$.

3.2.9. Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Otrzymasz równość: $(a + b)^2 = 40 + 2 \cdot 12$.
Odpowiedź: $(a + b)^2 = 64$.

3.2.10.

I sposób:
Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Otrzymasz równość: $a^2 - b^2 = 11 \cdot 5$.
Odpowiedź: $a^2 - b^2 = 55$.

II sposób:
Rozwiąż układ równań $\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = 11 \end{cases}$. Dodaj równania stronami, a otrzymasz $2a = 16$, czyli $a = 8$. Gdy od drugiego równania stronami odejmiesz pierwsze, to otrzymasz $2b = 6$. $b = 3$. Wtedy $a^2 - b^2 = 64 - 9 = 55$.

3.2.11. $(2x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25 - (4x^2 + 20x + 25) =$
$= 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 - 20x - 25 = -40x$
Odpowiedź: C.

3.2.12. Wiadomo, że: $32 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Zatem $32 = 8(a + b)$. Podziel obie strony tego równania przez 8. Otrzymasz $(a + b) = 4$.
Odpowiedź: A.

3.2.13. $P = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 = 9x^4 - 0{,}6x^2 + 0{,}01$.
Odpowiedź: B.

3.2.14. Skorzystaj, ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Odpowiedź: $P = 11 + 4\sqrt{6}$.

3.2.15. Skorzystaj z faktu, że każda liczba naturalna jest postaci: $2m$ lub $2n$, gdzie m jest liczbą naturalną. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Rozpatrz dwa przypadki.
Jeżeli $n = 2m$, to $n^2 = 4m^2$, czyli $n^2 = 4k$, gdzie $k = m^2$.
Jeżeli $n = 2m + 1$, to $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$, czyli $n^2 = 4(m^2 + m) + 1 = 4k + 1$, gdzie $k = m^2 + m$.

3.2.16. Najpierw skorzystaj ze wzoru $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Otrzymasz $(2x + 3y)^2 - 25$. Jest to, jak widzisz, różnica kwadratów $(2x + 3y)^2 - 5^2$, więc możesz skorzystać ze wzoru: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Otrzymasz $(2x + 3y - 5)(2x + 3y + 5)$.

3.2.17. Skorzystaj ze wzoru: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Pierwszy składnik danej sumy to x^2, więc pierwszym wyrazem dwumianu, który podnosisz do kwadratu, jest x. Analogicznie drugim wyrazem jest 2 lub (-2). Podnieś do kwadratu, a otrzymasz $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ lub $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Środkowym wyrazem otrzymanej sumy jest $4x$ lub $(-4x)$. Zatem $2k + 6 = 4$ lub $2k + 6 = -4$. Wyznacz k.
Odpowiedź: $k = -1$ lub $k = -5$.

3.2.18. Najpierw wykonaj zaznaczone mnożenia i potęgowanie, stosując odpowiednie wzory skróconego mnożenia. Pamiętaj o tym, aby wynik potęgowania zapisać w nawiasie. $25x^2 - 1 - (25x^2 - 10x + 1) - 5x + 5 = 25x^2 - 1 - 25x^2 + 10x - 1 - 5x + 5$.
Odpowiedź: $5x + 3$.

3.2.19. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias: $7x(a^2 - 4a + 4)$. Zastosuj wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy: $7x(a^2 - 4a + 4) = 7x(a - 2)^2$.
Odpowiedź: $7x(a - 2)^2$.

3.2.20. Zastosuj twierdzenie Pitagorasa do trójkąta o przyprostokątnych 15 i x oraz przeciwprostokątnej $(x + 3)$. Otrzymasz równość: $(x + 3)^2 = 225 + x^2$. Po uproszczeniu: $6x = 216$, czyli $x = 36$. Pole trójkąta to $P = 0{,}5 \cdot 36 \cdot 15$.
Odpowiedź: $P = 270$.

3.2.21. Dno pudełka ma powierzchnię równą $a^2 - 4b^2$, która stanowi $0{,}75a^2$. Zapisz równość $a^2 - 4b^2 = 0{,}75a^2$, a następnie przekształć ją tak, aby po prawej strony było zero: $0{,}25a^2 - 4b^2 = 0$. Po rozłożeniu lewej strony równania na czynniki otrzymasz $(0{,}5a - 2b)(0{,}5a + 2b) = 0$.
$0{,}5a - 2b = 0$, gdy $a = 4b$. Równość $0{,}5a + 2b = 0$ nie może zajść, gdyż $a > 0$ i $b > 0$.

3.2.22. Zastosuj wzór skróconego mnożenia na kwadrat dwumianu i wykonaj zaznaczone mnożenie: $(x - 4)^2 - x(x - 8) = x^2 - 8x + 16 - x^2 + 8x = 16$.

3.2.23. Niech x będzie pewną liczbą parzystą. Znajduje się ona między nieparzystymi liczbami $x - 1$ oraz $x + 1$. Masz wykazać, że $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Wynika to ze wzoru skróconego mnożenia.

3.2.24. Zastosuj wzór skróconego najpierw do dwóch pierwszych nawiasów. Następnie powtórz to dla dwóch pierwszych nawiasów itd.
Odpowiedź: $6561x^8 - 1$.

3.2.25. Jeżeli pierwszą z liczb naturalnych oznaczysz przez $2n - 1$, to kolejną będzie $2n + 1$. Różnica kwadratów tych liczb to wyrażenie: $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2$ (skoro różnica kwadratów jest liczbą dodatnią, a liczby są naturalne, to znaczy, że od większej liczby odjęto mniejszą). Zapisz odpowiednie równanie i je rozwiąż. Otrzymasz $n = 4$.
Odpowiedź: 7, 9.

3.2.26. Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika, a następnie dodaj liczniki:

$$\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)+\left(14-4\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)} = \frac{-32}{11} + 3\sqrt{3}.$$

3.2.27. Zauważ, że gdybyś odjął od obu stron tej równości wyrażenie $12xy$, to wystarczyłoby wykazać, że $9x^2 - 12xy + 4y^2 \geq 0$. Zauważ, że $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$. Wiesz, że kwadrat dowolnego dwumianu jest nieujemny, więc $(3x - 2y)^2 \geq 0$.
Zatem $9x^2 - 12xy + 4y^2 \geq 0$.