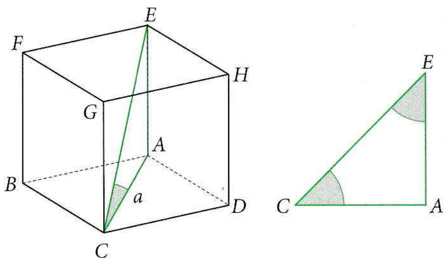
$$P_p = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_p = 8\sqrt{3}$$

Zauważ też, że odcinek AC też ma długość $a = 4$.
Teraz sporządź szkic graniastosłupa.



Kąt między krótszą przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy to kąt, jaki tworzy ona z krótszą przekątną rombu o długości a. Trójkąt ACE jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, więc odcinek AE, który jest wysokością graniastosłupa też ma długość a. Zatem objętość tego graniastosłupa możesz obliczyć tak:

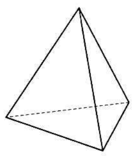
$$V = P_p \cdot a$$

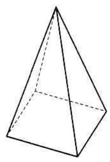
$$V = 8\sqrt{3} \cdot 4$$

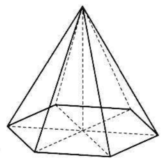
Odpowiedź: $32\sqrt{3}$.

10.2. Ostrosłupy

10.2.1. Na rysunkach poniżej zaznacz wysokość ściany bocznej i kąt, który tworzy z wysokością ostrosłupa.

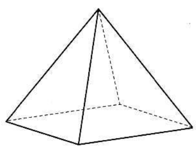
a) 

b) 

c) 

10.2.2. Zaznacz na rysunku ostrosłupa kąt między wysokościami sąsiednich ścian opuszczonymi na:

a) krawędzie podstawy;
b) wspólną krawędź boczną;
c) na przeciwległe krawędzie boczne.



10.2.3. Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego równa jest 10, a długość przekątnej podstawy 12. Oblicz wysokość ostrosłupa.

10.2.4. Oblicz objęto
o przekątnych 5 i 6.

10.2.5. Oblicz pole p
kość 0,5.

10.2.6. Piramida koł
o krawędzi podstawy
Oblicz wysokość ściar

10.2.7. W prawidłow
$a = 8$, a jego wysokoś
dziami bocznymi?

10.2.8. Pole powierz
równe $P_b = 18$. Miara
$\alpha = 90°$. Oblicz objęto

10.2.9. Podstawą ost
Krawędzie boczne teg
podstawy pod kątem

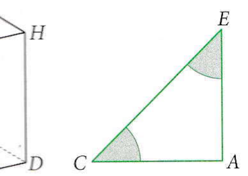
10.2.10. Krawędź b
dłuższa od wysokości
do płaszczyzny podst

10.2.11. Podstawą o
do podstawy, a najdł
tem 45°. Oblicz objęt

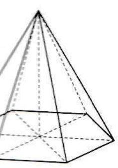
10.2.12. W czworok
gość 18. Oblicz sinus

10.2.13. Promień o
kątnego to $R = 10$ cr
ostrosłupa, jeśli jego

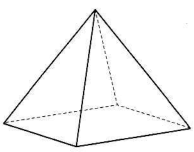
10.2.14. Krawędź p
$4\sqrt{3}$. Oblicz pole pow
nachylona do płaszcz



ej i kąt, który tworzy



iami sąsiednich ścian



czworokątnego równa
rosłupa.

10.2.4. Oblicz objętość ostrosłupa o wysokości 20, jeśli jego podstawą jest romb o przekątnych 5 i 6.

10.2.5. Oblicz pole podstawy ostrosłupa, którego objętość jest równa 4,5, a wysokość 0,5.

10.2.6. Piramida koło Luwru ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 35 m i wysokości 20,6 m.
Oblicz wysokość ściany bocznej i jej pole powierzchni.

10.2.7. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym krawędź podstawy ma długość $a = 8$, a jego wysokość $H = 4\sqrt{2}$. Jaką miarę ma kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi?

10.2.8. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest równe $P_b = 18$. Miara kąta ściany bocznej przy wierzchołku S ostrosłupa jest równa $\alpha = 90°$. Oblicz objętość ostrosłupa.

10.2.9. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o boku $a = 48$ i przekątnej $d = 50$. Krawędzie boczne tego ostrosłupa są równej długości i są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz objętość ostrosłupa.

10.2.10. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest cztery razy dłuższa od wysokości tego ostrosłupa. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy?

10.2.11. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Krawędź boczna AS jest prostopadła do podstawy, a najdłuższa krawędź ostrosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{2}$ cm.

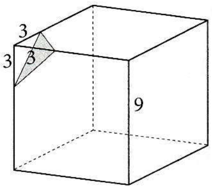
10.2.12. W czworokątnym ostrosłupie prawidłowym wszystkie krawędzie mają długość 18. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

10.2.13. Promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego to $R = 10$ cm. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy ostrosłupa, jeśli jego krawędź boczna ma długość 26 cm.

10.2.14. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $4\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa, jeżeli jego ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.

10.2.15. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|BC| = |AC| = 12\sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa nachylone są do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 58°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Wynik podaj z dokładnością do 1 miejsca po przecinku.

10.2.16. Od sześcianu o krawędzi 9 cm odcięto naroże, prowadząc przekrój przez punkty znajdujące się na krawędziach, w odległości 3 cm od wierzchołka sześcianu. Objętość odciętego ostrosłupa:



A. jest dwa razy mniejsza od $\frac{1}{9}$ objętości sześcianu;

B. jest równa 13,5 cm^3;

C. jest o 81 cm^3 mniejsza od objętości sześcianu;

D. stanowi $\frac{1}{162}$ objętości sześcianu.

10.2.17. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 60°. Podstawa jest kwadratem o polu 196. Długość krawędzi bocznej jest równa:

A. 14; B. $14\sqrt{2}$; C. $\frac{14\sqrt{6}}{3}$; D. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

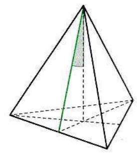
10.2.18. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $20\sqrt{3}$. Ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α taki, że tg $\alpha = 2$. Długość krawędzi podstawy jest równa:

A. 40; B. 60; C. $10\sqrt{3}$; D. $20\sqrt{3}$.

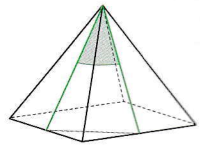
10.2.19. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie są równej długości. Oblicz miarę kąta między wysokością ostrosłupa a jego krawędzią boczną.

10.2.20. W czworościanie foremnym $ABCS$ krawędź ma długość a. Uzasadnij, że obwód czworokąta, którego wierzchołki są środkami krawędzi AB, BC, AS, CS, jest równy $2a$.

10.2.1.
a)



10.2.2.
a)



10.2.3. Jeżeli przekątna
ma długość 6. Wysoko
z twierdzenia Pitagoras
$H^2 + 6^2 = 10^2$ H
Odpowiedź: $H = 8$.

10.2.4. Oblicz pole pod
$P_p = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, gdzie $d_1 =$

$P_p = 15$. Objętość ostro

Odpowiedź: $V = 100$.

10.2.5. Przekształć wzór

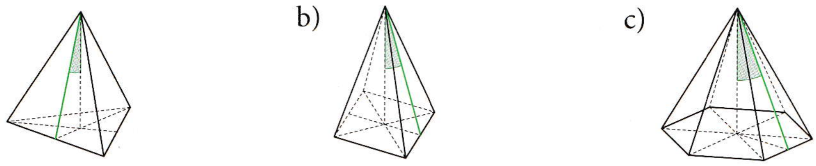
Odpowiedź: $P_p = 27$.

10.2.6. Aby wyznaczyć
rozwiązać trójkąt pros
jących długości 20,5 (w
wa długości krawędzi p
Zatem $h^2 = 17,5^2 + 20,$
ściany o podstawie 35
niecałe 472 m^2.
Odpowiedź: Wysokość
472 m^2.

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

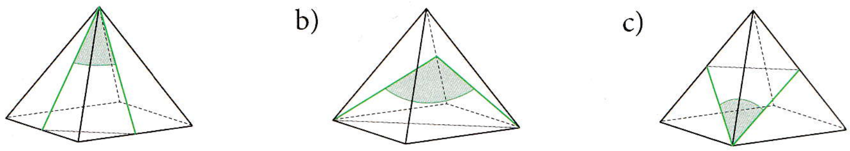
10.2.1.

a) b) c)



10.2.2.

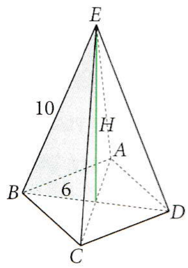
a) b) c)



10.2.3. Jeżeli przekątna podstawy ma długość 12, to jej połowa ma długość 6. Wysokość ostrosłupa możesz obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$H^2 + 6^2 = 10^2$ $\qquad$ $H^2 = 64$

Odpowiedź: $H = 8$.



10.2.4. Oblicz pole podstawy, korzystając ze wzoru na pole rombu:

$P_p = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$, gdzie $d_1 = 5$ oraz $d_2 = 6$.

$P_p = 15$. Objętość ostrosłupa oblicz ze wzoru $V = \dfrac{1}{3} P_p \cdot H$, gdzie $H = 20$.

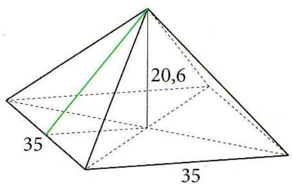
Odpowiedź: $V = 100$.

10.2.5. Przekształć wzór na objętość ostrosłupa $V = \dfrac{1}{3} P_p \cdot H$. Otrzymasz $P_p = \dfrac{3V}{H}$.

Odpowiedź: $P_p = 27$.

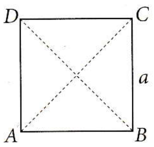
10.2.6. Aby wyznaczyć wysokość ściany bocznej h, trzeba rozwiązać trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długości 20,5 (wysokość ostrosłupa) i 17,5 (połowa długości krawędzi podstawy).

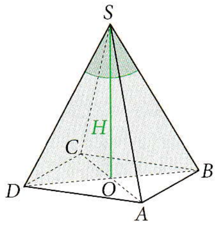
Zatem $h^2 = 17{,}5^2 + 20{,}5^2 \Rightarrow h \approx 26{,}95$. Pole powierzchni ściany o podstawie 35 m i wysokości 26,95 m jest równe niecałe 472 m^2.



Odpowiedź: Wysokość ściany bocznej około 26,95 m, pole jej powierzchni około 472 m^2.

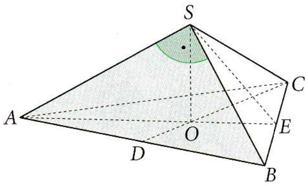
10.2.7. *BD* jest przekątną kwadratu o boku $a = 8$, więc ma długość $8\sqrt{2}$. Zauważ, że $|DO| = |SO| = H$, więc trójkąt *OSD* jest trójkątem równoramiennym prostokątnym. Zatem kąt *OSD* ma miarę 45°, a kąt *BSD* miarę 90°.
Odpowiedź: 90°.

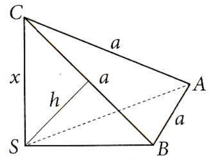


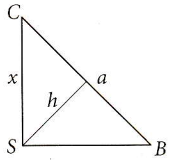


10.2.8. Oznacz: a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość ściany bocznej, H – wysokość ostrosłupa. Pole powierzchni bocznej to pole trzech ścian bocznych. Pole powierzchni trójkąta stanowiącego ścianę boczną ostrosłupa jest więc równe 6. Rozważ np. ścianę boczną *BAS*. Jest to trójkąt prostokątny równoramienny.
Możesz teraz postąpić na dwa sposoby.
Jeżeli ścianę *BAS* potraktujesz jako podstawę ostrosłupa, to wysokość *CS* takiego „przewróconego" ostrosłupa jest równa długości przyprostokątnej (na rysunku oznaczona x) trójkąta o polu 6, więc $x = 2\sqrt{3}$. Wtedy objętość otrzymasz bardzo szybko, podstawiając dane do wzoru.

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3}$ $\qquad$ $V = 4\sqrt{3}$







Możesz też nie zmieniać położenia ostrosłupa, ale wtedy będzie trzeba obliczyć wysokość ostrosłupa. Zauważ, że: $a = x\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{6}$, $h = 0{,}5a \Rightarrow h = \sqrt{6}$. $|OE|$ jest równa jednej trzeciej długości wysokości trójkąta równobocznego o boku a.

$$|OE| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow |OE| = \frac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{6} \Rightarrow |OE| = \sqrt{2}$$

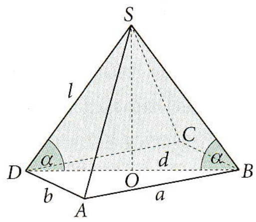
Zastosuj twierdzenie Pitagorasa do trójkąta *OES* i oblicz H: $H = 2$.

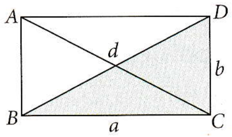
Pole podstawy $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, czyli $P_p = 6\sqrt{3}$. Wystarczy obliczyć objętość ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = 4\sqrt{3}$.

10.2.9. Do obliczenia objętości potrzebne jest pole podstawy i wysokość ostrosłupa. Wysokość otrzymasz, wykorzystując odpowiednią funkcję trygonometryczną kąta α w trójkącie *BOS*. Do obliczenia pola podstawy potrzebna jest długość drugiego boku prostokąta, którą wyznaczysz za pomocą twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *BCD*.

Odpowiedź: $V = 5600\sqrt{3}$.



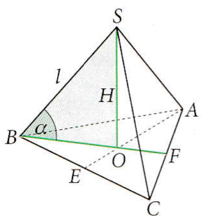


10.2.10. Kąt nachyle
kąt między krawędzi
wę *OS*.
Wprowadź oznaczen
l – długość krawędzi
α – kąt nachylenia k
Rozważ trójkąt prost
Odpowiedź: $\sin\alpha =$

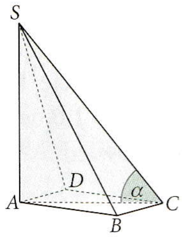
10.2.11. Odcinek *AS*
CS jest nachylona
to trójkąt *ACS* jest
i $|AS| = |AC| = a\sqrt{2}$.
Zatem $H = 12$ cm.
Odpowiedź: $V = 288$

10.2.12. Kąt nachyle
podstawy to kąt mię
a rzutem tej wysokoś
gość krawędzi przez
Zauważ, że ściana bo
o boku a, więc $h =$
W trójkącie *OES*, si
Pitagorasa: $H^2 + (0{,}5$
Odpowiedź: $\cos\alpha =$

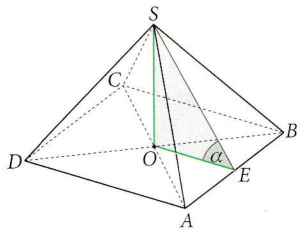
10.2.13. Z twierdzeni
trójkąta *BOS* możes
słupa.
$H^2 + R^2 = l^2$, więc H
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{r}$. Promień
równoboczny jest dw
kącie. Stąd $r = 5$ cm.
Odpowiedź: $\operatorname{tg}\alpha = 4,$



10.2.10. Kąt nachylenia krawędzi bocznej BS do podstawy to kąt między krawędzią BS a jej rzutem prostokątnym na podstawę OS.
Wprowadź oznaczenia: H – wysokość ostrosłupa,
l – długość krawędzi bocznej,
α – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
Rozważ trójkąt prostokątny BOS. $\sin\alpha = \frac{H}{l}$; $\sin\alpha = \frac{H}{4H}$.
Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.



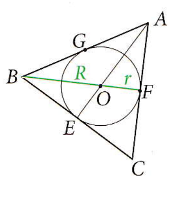
10.2.11. Odcinek AS jest wysokością ostrosłupa. Jeżeli krawędź CS jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°, to trójkąt ACS jest trójkątem prostokątnym równoramiennym i $|AS| = |AC| = a\sqrt{2}$.
Zatem $H = 12$ cm.
Odpowiedź: $V = 288\text{ cm}^3$.

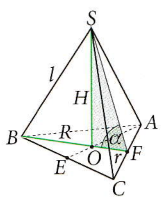


10.2.12. Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy to kąt między wysokością ściany bocznej ES a rzutem tej wysokości na podstawę – EO. Oznacz długość krawędzi przez a, a wysokość ściany bocznej – h. Zauważ, że ściana boczna jest trójkątem równobocznym o boku a, więc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. W tym wypadku $h = 9\sqrt{3}$.

W trójkącie OES, $\sin\alpha = \frac{|SO|}{|ES|} = \frac{H}{h}$. Wysokość H możesz obliczyć z twierdzenia Pitagorasa: $H^2 + (0{,}5a)^2 = h^2$. $H = 9\sqrt{2}$.

Odpowiedź: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

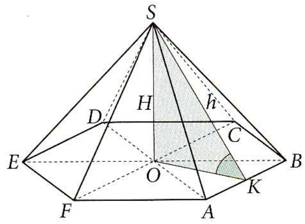




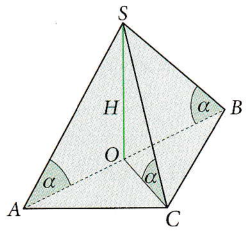
10.2.13. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta BOS możesz obliczyć wysokość H ostrosłupa.
$H^2 + R^2 = l^2$, więc $H = 24$ cm.
$\text{tg}\,\alpha = \frac{H}{r}$. Promień r okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest dwa razy krótszy od promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie. Stąd $r = 5$ cm.
Odpowiedź: $\text{tg}\,\alpha = 4{,}8$.

10.2.14. Rozważ trójkąt OKS. Zauważ, że odcinek OK jest wysokością równobocznego trójkąta ABO o boku $a = 4\sqrt{3}$, więc $|OK| = 6$. Z definicji funkcji cosinus obliczysz długość $|SK| = h$.

Odpowiedź: $P_b = 144\sqrt{3}$.



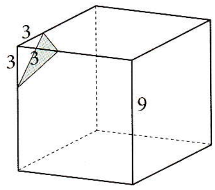
10.2.15. Najłatwiej rozwiążesz to zadanie, gdy uświadomisz sobie, że ten ostrosłup jest połową ostrosłupa prawidłowego o krawędzi podstawy równej $12\sqrt{2}$. Zrozumiesz wtedy, dlaczego spodek wysokości znajduje się w środku przeciwprostokątnej AB trójkąta stanowiącego podstawę. $|AO| = 0{,}5 \cdot |AB| = 12$. Wysokość oblicz, wykorzystując definicję funkcji tangens dla kątów trójkąta OAS: $\text{tg}\, 58° \approx 1{,}6$, więc $H \approx 19{,}2$.
Odpowiedź: $V = 921{,}6$.



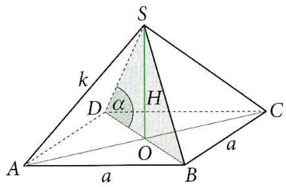
10.2.16. Obcięte naroże to ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt równoramienny prostokątny o polu $\frac{9}{2}$ cm^2 i wysokości 3 cm, zatem jego objętość $V_1 = \frac{9}{2}$ cm^3. Objętość sześcianu to $V = 729$ cm^3.

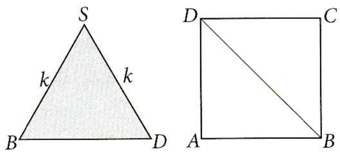
$\frac{V}{V_1} = 162 \qquad \frac{1}{9}V = 81 \qquad V - 81 = 648$

Odpowiedź: D.



10.2.17. Zauważ, że trójkąt BDS jest trójkątem równobocznym. Wynika stąd, że jego bok – krawędź boczna – ma tę samą długość co przekątna podstawy BD. Podstawa jest kwadratem o polu 196, więc jego przekątna ma długość $14\sqrt{2}$. Tyle samo ma krawędź boczna.
Odpowiedź: B.



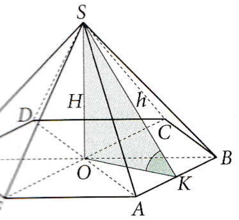


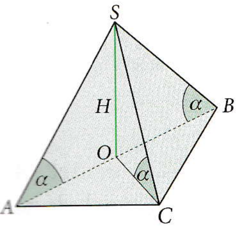
10.2.18. tg α = 2, wię

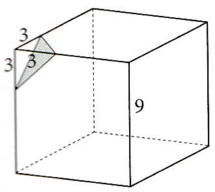
Po podstawieniu da
Zauważ, że r to dłu
wpisanego w trójką
wysokości), a więc
ostrosłupa:
$a\sqrt{3} = 60\sqrt{3} \Rightarrow a =$
Odpowiedź: B.

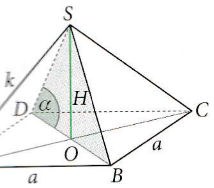
10.2.19. Przekątna
ma długość $a\sqrt{2}$. Za
$\sin\alpha = \frac{|OD|}{|SD|}$.
$\sin\alpha = \frac{0{,}5a\sqrt{2}}{a} =$
Odpowiedź: $\alpha = 45°$

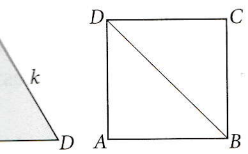
10.2.20. W trójkącie
boku trzeciego boku
Tak więc w trójkącie
w trójkącie BCS zach
Obwód czworokąta



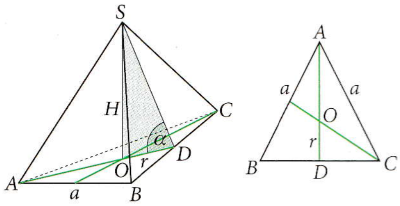








10.2.18. tg $\alpha = 2$, więc $\frac{H}{r} = 2$. Stąd $r = \frac{H}{2}$.

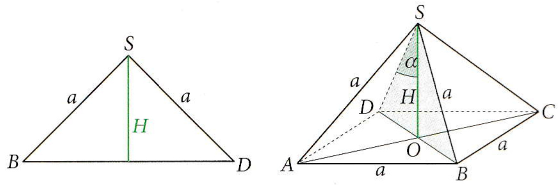


Po podstawieniu danych $r = 10\sqrt{3}$.
Zauważ, że r to długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ($\frac{1}{3}$ jego wysokości), a więc $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Z tej zależności obliczysz długość krawędzi podstawy ostrosłupa:

$a\sqrt{3} = 60\sqrt{3} \Rightarrow a = 60$

Odpowiedź: B.

10.2.19. Przekątna BD podstawy ma długość $a\sqrt{2}$. Zatem



$\sin\alpha = \frac{|OD|}{|SD|}$.

$\sin\alpha = \frac{0,5a\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Odpowiedź: $\alpha = 45°$

10.2.20. W trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do boku trzeciego boku tego trójkąta i ma długość równą połowie długości tego boku.

Tak więc w trójkącie ABS mamy $|EH| = \frac{1}{2}|BS|$, w trójkącie ABC mamy $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$, w trójkącie BCS zachodzi $|FG| = \frac{1}{2}|BS|$ i w trójkącie ACS zachodzi $|HG| = \frac{1}{2}|AC|$.

Obwód czworokąta $EFGH$ jest równy $4 \cdot \frac{1}{2}a = 2a$.