11.2. Kombinatoryka. Prawdopodobieństwo

11.2.1. Ile różnych słów (mających sens lub nie) możesz utworzyć, przestawiając litery wyrazu KRA? Wypisz te słowa.

11.2.2. Ośmiocyfrowy numer telefonu w pewnej dzielnicy zaczyna się od grupy cyfr 825. Liczba różnych możliwych numerów telefonów w tej dzielnicy jest równa:
A. 6561; B. 9000; C. 10 000; D. 5040

11.2.3. Ile dwucyfrowych liczb można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4?

11.2.4. Ile trzycyfrowych liczb można utworzyć z liczb 0, 1, 2, 3, 4, jeśli cyfra dziesiątek musi być różna od cyfry jedności?

11.2.5. Rzucasz dwiema kostkami i dodajesz podwojoną liczbę oczek uzyskaną na pierwszej kostce do potrojonej liczby oczek uzyskanej na drugiej. Jakie liczby możesz otrzymać?

11.2.6. Rzucasz dwiema kostkami, z których na jednej są liczby 1, 3, 5, 7, 9 i 11, a na drugiej 2, 4, 6, 8, 10, 12, a następnie obliczasz sumę oczek uzyskanych na obu kostkach. Jakie wyniki możesz otrzymać?

11.2.7. Ile różnych słów (mających sens lub nie) można utworzyć, przestawiając litery słowa ZABAWA?
A. 120; B. 360; C. 720; D. 24.

11.2.8. Ile różnych trzyliterowych słów (mających sens lub nie) możesz utworzyć z liter wyrazu KONCERT?

11.2.9. Radek ma 3 pary spodni, 8 par skarpet i 3 pary butów. Na ile sposobów może wybrać zestaw: spodnie, buty, skarpety? Ile musi mieć koszul, aby liczba sposobów, na które mógłby się ubrać (spodnie, koszula, skarpety, buty) była większa niż 300?

11.2.10. Weronika dojeżdża do pracy. Może dojechać bezpośrednio autobusem linii numer: 112 lub 113 albo może dojechać z przesiadką, najpierw pociągiem KRAK lub WANDA, a następnie tramwajem linii 8, 11 lub 12. Ile ma możliwych sposobów dojazdu do pracy?

11.2.11. W piórniku są długopisy w czterech kolorach (czarny, niebieski, czerwony i zielony), trzy zakreślacze (żółty, pomarańczowy i błękitny) i 4 kredki (brązowa, fioletowa, niebieska i zielona). Klaudia chce wziąć jeden długopis i zakreślacz lub kredkę. Na ile sposobów mogła to zrobić?

11.2.12. W mikrobusie jest 7 numerowanych miejsc dla pasażerów i jedno dla kierowcy. Na ile sposobów można posadzić 4 pasażerów na numerowanych miejscach w tym mikrobusie?

11.2.13. Wybieramy jedną z liczb od 1 do 1000. Ile wśród nich jest takich liczb, które w zapisie dziesiętnym mają dokładnie:

a) 3 zera; b) 2 zera; c) 1 zero?

11.2.14. Ile jest dwucyfrowych liczb naturalnych takich, że wśród cyfr je tworzących jest co najmniej jedna piątka, ale nie ma zera?

11.2.15. Wśród 150 osób w Australii przeprowadzono ankietę dotyczącą wyjazdów za granicę. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli.

Ile osób:

a) nie wyjeżdżało na żaden z wymienionych kontynentów;
b) wyjechało tylko na jeden z wymienionych kontynentów;
c) wyjechało na dwa wymienione kontynenty?

Europa	93
Azja	44
Ameryka	16
Europa i Azja	28
Europa i Ameryka	8
Azja i Ameryka	6
Europa, Azja, Ameryka	2

11.2.16. Na ile sposobów można ustawić w jednym rzędzie pięciu panów i cztery panie do fotografii, jeśli ani dwie panie, ani dwóch panów nie może stać obok siebie?

11.2.17. W klasie jest 29 osób, w tym 14 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać trzyosobowy samorząd (przewodniczący, zastępca, skarbnik), jeżeli przewodniczący musi być dziewczyną, a zastępca – chłopcem?

11.2.18. Na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację z dwudziestodziewięcioosobowej klasy?

11.2.19. Na sprawdzianie uczeń losuje 4 pytania spośród 10. Na ile sposobów może to zrobić?

11.2.20. Dwanaście osób przesłało sobie kartki z życzeniami. Ile przesłano kartek?

11.2.21. Na spotkaniu, w którym uczestniczyło dwunastu przyjaciół, każdy wymienił z każdym uścisk dłoni. Ile było powitań?

11.2.22. Z torebki,
Tomek wylosował 4.
a) Na ile sposobów
b) Ile jest możliwych

11.2.23. Ośmiu wi
lono kolejne numer
dzielenia pozostałyc
A. 5040;

11.2.24. W rozgry
rozgrywano według

11.2.25. W sali gi
czerwonych, 11 nieb
rając jedną z piłek b

11.2.26. W grze SU
cają dwoma dwuna
rysunku narysowan
ściankach zielonej k
krowa, świnia, 3 owc
koń, 2 świnie, 2 owc
Ile jest możliwości w
mych zwierząt?

11.2.27. Spośród lic
jedną.
Jakie jest prawdopod

11.2.28. Z talii 52
wania:
a) 2 kierów;
b) 2 figur.

11.2.29. W klasie w
uczą się też niemiec
ich się nie uczyć wca
F – zdarzenie, że los
N – zdarzenie, że los

opis i zakreślacz lub

erów i jedno dla kie-
rowanych miejscach

est takich liczb, które

o?

ód cyfr je tworzących

	93
	44
	16
Azja	28
Ameryka	8
neryka	6
Azja, Ameryka	2

ięciu panów i cztery
oże stać obok siebie?

obów można wybrać
eżeli przewodniczący

egację z dwudziesto-

a ile sposobów może

le przesłano kartek?

jaciół, każdy wymie-

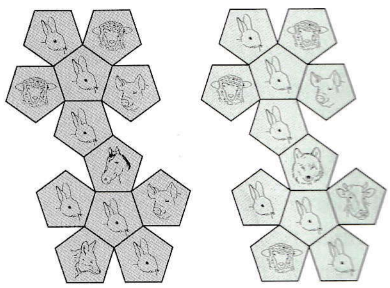
11.2.22. Z torebki, w której jest 16 numerków zielonych i 24 numerki czerwone Tomek wylosował 4.
a) Na ile sposobów mógł to uczynić, jeżeli nie był ważny kolor?
b) Ile jest możliwych wyników wylosowania 2 numerków czerwonych i 2 zielonych?

11.2.23. Ośmiu wioślarzom, wśród których jest sternik i trzech juniorów, przydzielono kolejne numery od 1 do 8. Sternik otrzymał numer 1. Liczba sposobów przydzielenia pozostałych numerów tak, aby juniorzy dostali numery nieparzyste, to:
A. 5040; B. 30; C. 2520; D. 144.

11.2.24. W rozgrywkach Pucharu Świata siatkarzy brało udział 12 drużyn. Mecze rozgrywano według zasady „każdy z każdym". Ile odbyło się meczy?

11.2.25. W sali gimnastycznej jest kosz z kolorowymi piłkami. Jest tam 13 piłek czerwonych, 11 niebieskich i 12 zielonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierając jedną z piłek bez zwracania uwagi na kolory, Joasia trafi na piłkę zieloną?

11.2.26. W grze SUPER FARMER gracze rzucają dwoma dwunastościennymi kostkami (na rysunku narysowano siatki tych kostek). Na ściankach zielonej kostki namalowane są: wilk, krowa, świnia, 3 owce i 6 królików. Na szarej: lis, koń, 2 świnie, 2 owce i 6 królików.
Ile jest możliwości wyrzucenia dwóch takich samych zwierząt?



11.2.27. Spośród liczb $\left\{\log_2\frac{1}{2}, 2^{-3}, \sqrt{8}, -12, \log_2 3, 2^{\frac{1}{2}}, \pi, \left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right\}$ wylosowano jedną.

Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby wymiernej?

11.2.28. Z talii 52 kart wylosowano dwie. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:
a) 2 kierów;
b) 2 figur.

11.2.29. W klasie wszyscy uczniowie uczą się angielskiego, ale prócz angielskiego uczą się też niemieckiego i francuskiego. Oba te języki nie są obowiązkowe i można ich się nie uczyć wcale, uczyć się tylko jednego lub obu.
F – zdarzenie, że losowo wybrany uczeń uczy się francuskiego.
N – zdarzenie, że losowo wybrany uczeń uczy się niemieckiego.

Wiadomo, że $P(F) = \frac{2}{5}$, a $P(N) = \frac{3}{5}$. Prawdopodobieństwo, że uczeń nie uczy się żadnego z tych języków, jest równe $\frac{1}{6}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń uczy się i francuskiego, i niemieckiego?

11.2.30. Wybieramy jedną z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, a z pozostałych – drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cyfra podzielna przez 3 będzie wybrana co najwyżej raz?

11.2.31. Rzucamy dwiema kostkami, a wyniki obu rzutów mnożymy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że iloczyn liczby oczek wyrzuconych na obu kostkach jest równy co najmniej 12?

11.2.32. Rzucamy dwiema kostkami, a wyniki obu rzutów dodajemy i obliczamy resztę z dzielenia tej sumy przez 4. Prawdopodobieństwo sumy podzielnej przez 4 (reszta z dzielenia przez 4 jest równa 0) przy rzucie dwiema kostkami jest równe:

A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{1}{3}$; C. $\frac{1}{4}$; D. $\frac{1}{6}$.

11.2.33. Spośród 24 uczniów pewnej klasy chęć zdawania na maturze biologii zadeklarowało 37,5%, a geografii – 50%. Oba te przedmioty wybrało 25% uczniów. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń będzie zdawał biologię lub geografię.

11.2.34. Danych jest 6 kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Losujemy spośród nich jedną. Wówczas prawdopodobieństwo, że jest ona podzielna przez:

A. 4, musi być mniejsze od $\frac{1}{3}$; B. 5, musi być większe od $\frac{1}{3}$;

C. 3, musi być równe $\frac{1}{2}$; D. 6, musi być równe $\frac{1}{6}$.

11.2.35. Talia do skata składa się z 32 kart, w czterech kolorach. W talii francuskiej to dwa czarne: trefl (♣) i pik (♠) oraz dwa czerwone: karo (♦) i kier (♥). Talia ta rozpoczyna się od siódemek i kończy na asach.
Z talii do skata losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania asa lub karty koloru czarnego.

11.2.36. Do zapisu l
bieństwo otrzymania

11.2.37. Na półce us
skiego pisarza Georg
dla wron i *Taniec ze*
wieści (*Gra o tron, St*

11.2.38. Spośród w
dwa. Jakie jest praw
stościanu?
Ustal, ile jest wierzch

11.2.39. W pudełku
niające do następneg
stwo wygrania przy
zdobędziemy uprawn

11.2.40. Każdy golf
W torbie znajduje się

Prawdopodobieństw

Ile jest wszystkich pi

11.2.41. Są trzy nier
na biała, w drugim s
kule.
Losujemy najpierw p
a potem, nie zwraca
druga kula będzie cz

11.2.1. Są trzy miejsc
żesz wstawić jedną z
już tylko jedną z dw
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ możliwoś
Te słowa to: KRA, KA

czeń nie uczy się żad-

wo, że losowo wybra-

ch – drugą. Jakie jest
wybrana co najwyżej

mnożymy. Jakie jest
na obu kostkach jest

odajemy i obliczamy
y podzielnej przez 4
tkami jest równe:

D. $\frac{1}{6}$.

maturze biologii za-
ybrało 25% uczniów.
zdawał biologię lub

n. Losujemy spośród
na przez:

e od $\frac{1}{3}$;

$\frac{1}{6}$.

n. W talii francuskiej
) i kier (♥). Talia ta

wo wylosowania asa

11.2.36. Do zapisu liczby pięciocyfrowej użyto tylko cyfr 0 i 1. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3.

11.2.37. Na półce ustawiono *Pieśń lodu i ognia* – serię 5 tomów powieści amerykańskiego pisarza Georga Martina: *Gra o tron, Starcie królów, Nawałnica mieczy, Uczta dla wron* i *Taniec ze smokami.* Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsze trzy powieści (*Gra o tron, Starcie królów, Nawałnica mieczy*) będą stały na początku?

11.2.38. Spośród wszystkich wierzchołków dwunastościanu foremnego losujemy dwa. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będą one tworzyć krawędź dwunastościanu?
Ustal, ile jest wierzchołków dwunastościanu.

11.2.39. W pudełku są losy na loterię: 60 przegrywających, 2 wygrywające i 2 uprawniające do następnego losowania. Kupujemy jeden los. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania przy maksymalnym wykorzystaniu uprawnień (oznacza to, że jeśli zdobędziemy uprawnienia do następnego losowania, to je wykorzystamy)?

11.2.40. Każdy golfista oznacza swoim symbolem piłeczki, których używa do gry. W torbie znajduje się n piłeczek do golfa, w tym 2 nieoznaczone. Wybrano 2 piłeczki. Prawdopodobieństwo, że obie są oznaczone, jest równe $\frac{15}{22}$.

Ile jest wszystkich piłek?

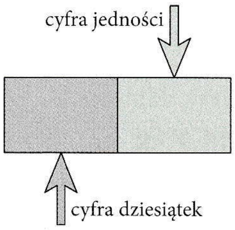
11.2.41. Są trzy nierozróżnialne pudełka. W pierwszym jest jedna czarna kula i jedna biała, w drugim są dwie czarne kule i dwie białe, a w trzecim są tylko trzy czarne kule.
Losujemy najpierw pudełko (są nierozróżnialne!). Następnie losujemy pierwszą kulę, a potem, nie zwracając tej pierwszej, drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta druga kula będzie czarna?

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

11.2.1. Są trzy miejsca, na których masz umieścić litery. Na pierwsze miejsce możesz wstawić jedną z trzech liter. Są więc 3 możliwości. Na drugie miejsce wstawisz już tylko jedną z dwóch liter. Na trzecie miejsce wstawisz ostatnią literę. Masz więc $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ możliwości.
Te słowa to: KRA, KAR, RKA, RAK, AKR, ARK.

11.2.2. Trzy z siedmiu miejsc, na których możesz wstawić cyfry, są już zajęte. Pozostają cztery miejsca. Na każde z nich możesz wstawić jedną z 10 cyfr. Zatem wszystkich takich numerów jest 10^4.
Odpowiedź: C.

11.2.3. Są dwa miejsca, na które możesz wstawić cyfry.
Liczba ma być dwucyfrowa, więc cyfra dziesiątek nie może być równa zero. Dlatego na pierwszym miejscu możesz wstawić jedną z czterech pozostałych cyfr. Cyfra jedności jest dowolna, więc na drugim miejscu możesz wstawić jedną z pięciu cyfr.



Stosując zasadę mnożenia, otrzymasz $4 \cdot 5 = 20$ możliwości.
Odpowiedź: Z cyfr 0, 1, 2, 3, 4 można utworzyć 20 liczb dwucyfrowych.

11.2.4. Na pierwszym miejscu możesz wstawić jedną z 4 cyfr (nie możesz wstawić zera). Na drugim – jedną z pięciu cyfr, a na trzecim – jedną z czterech cyfr (nie może to być cyfra, która została wstawiona na drugim miejscu). Wszystkich możliwości jest $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$.

11.2.5. Zapisz w tabelce wyniki rzutów w postaci par liczb, w których na pierwszym miejscu jest wynik pierwszego rzutu, a na drugim miejscu – wynik drugiego rzutu.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2,6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(4, 5)	(4, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Teraz łatwiej będzie wykonać działania:

	1	2	3	4	5	6
1	5	8	11	14	17	20
2	7	10	13	16	19	22
3	9	12	15	18	21	24
4	11	14	17	20	23	26
5	13	16	19	22	25	28
6	15	18	21	24	27	30

Odpowiedź: Można otrzymać kolejne liczby naturalne od 5 do 30 z wyjątkiem 6 i 29.

11.2.6.

1
3
5
7
9
11

Odpowiedź: Można
to 3, a ostatnia – 23

11.2.7. Gdyby wszys
w zestawie liter do
przez liczbę możliw
rowych słów będzie
Odpowiedź: A.

11.2.8. Pierwszą liter
liter), drugą na 6, a
$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ słów.

11.2.9. Radek może
przez x oznaczysz li
możesz zapisać w p

$72x > 300 \Rightarrow x > 4$

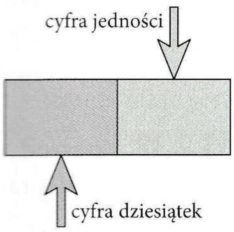
Odpowiedź: Radek
ba możliwości dobr
musi mieć przynajm

11.2.10.
I sposób:
Przeanalizuj zadani
jazdu Weroniki do
ką pociągiem i tram

KRAK
WANDA

Wszystkich możliw

są już zajęte. Pozosta-
fr. Zatem wszystkich



frowych.

(nie możesz wstawić
terech cyfr (nie może
szystkich możliwości

tórych na pierwszym
nik drugiego rzutu.

6
, 6)
,6)
, 6)
, 6)
, 6)
, 6)

6
20
22
24
26
28
30

30 z wyjątkiem 6 i 29.

11.2.6.

	2	4	6	8	10	12
1	3	5	7	9	11	13
3	5	7	9	11	13	15
5	7	9	11	13	15	17
7	9	11	13	15	17	19
9	11	13	15	17	19	21
11	13	15	17	19	21	23

Odpowiedź: Można otrzymać 11 kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwsza to 3, a ostatnia – 23.

11.2.7. Gdyby wszystkie litery były różne, to byłoby $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Jednak w zestawie liter do wykorzystania są trzy litery A, więc musisz ten wynik podzielić przez liczbę możliwych przestawień tych liter $3 \cdot 2 = 6$. Zatem wszystkich sześcioliterowych słów będzie $720 : 6 = 120$.
Odpowiedź: A.

11.2.8. Pierwszą literę słowa wybierasz na 7 sposobów (jest do dyspozycji 7 różnych liter), drugą na 6, a trzecią na 5 sposobów. Zastosuj zasadę mnożenia, a otrzymasz $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ słów.

11.2.9. Radek może wybrać spodnie, buty i skarpety na $3 \cdot 8 \cdot 3 = 72$ sposoby. Jeżeli przez x oznaczysz liczbę koszul, to liczbę sposobów, na które może się ubrać Radek, możesz zapisać w postaci $72x$. Wystarczy rozwiązać nierówność:

$$72x > 300 \Rightarrow x > 4\frac{1}{6}.$$

Odpowiedź: Radek może wybrać buty, spodnie i skarpety na 72 sposoby. Żeby liczba możliwości dobrania zestawu: spodnie, koszula, buty i skarpet przekroczyła 300, musi mieć przynajmniej 5 koszul.

11.2.10.
I sposób:
Przeanalizuj zadanie poprzez wypisanie wszystkich możliwości wyboru sposobu dojazdu Weroniki do pracy. Weronika może jechać autobusem: 112, 113 lub z przesiadką pociągiem i tramwajem:

	tramwaj 8	tramwaj 11	tramwaj 12
KRAK	KRAK i 8	KRAK i 11	KRAK i 12
WANDA	WANDA i 12	WANDA i 11	WANDA i 12

Wszystkich możliwości jest $2 + 6 = 8$.

II sposób:
Zadanie możesz rozwiązać, stosując regułę mnożenia i regułę dodawania.
Autobus (dwie możliwości) lub pociąg (dwie możliwości) i tramwaj (trzy możliwości):
$2 + 2 \cdot 3 = 8$.
Odpowiedź: Weronika ma 8 możliwych sposobów dojazdu do pracy.

11.2.11.
I sposób:
Wypisz wszystkie możliwości:
Wprowadź oznaczenia: (c) – długopis czarny, (n) – długopis niebieski, (cz) – długopis czerwony i (z) – długopis zielony;
(Y) – zakreślacz żółty, (O) – zakreślacz pomarańczowy, (B) – zakreślacz błękitny;
(kb) – kredka brązowa, (kf) – kredka fioletowa, (kn) – kredka niebieska, (kz) – kredka zielona.
Klaudia wybiera długopis i zakreślacz:

	długopis czarny	długopis niebieskie	długopis zielony	długopis czerwony
zakreślacz żółty	(c) i (Y)	(n) i (Y)	(z) i (Y)	(cz) i (Y)
zakreślacz pomarańczowy	(c) i (O)	(n) i (O)	(z) i (O)	(cz) i (O)
zakreślacz błękitny	(c) i (B)	(n) i (B)	(z) i (B)	(cz) i (B)

lub długopis i kredkę:

	długopis czarny	długopis niebieskie	długopis zielony	długopis czerwony
kredka brązowa	(c) i (kb)	(n) i (kb)	(z) i (kb)	(cz) i (kb)
kredka fioletowa	(c) i (kf)	(n) i (kf)	(z) i (kf)	(cz) i (kf)
kredka niebieska	(c) i (kn)	(n) i (kn)	(z) i (kn)	(cz) i (kn)
kredka zielona	(c) i (kz)	(n) i (kz)	(z) i (kz)	(cz) i (kz)

Odpowiedź: Klaudia ma 28 możliwości wyboru.

II sposób:
Klaudia może wybrać długopis i zakreślacz na $4 \cdot 3 = 12$ sposobów (zgodnie z regułą mnożenia).
Klaudia może wybrać długopis i kredkę na $4 \cdot 4 = 16$ sposobów (zgodnie z regułą mnożenia).
Klaudia może wybrać długopis i zakreślacz lub długopis i kredkę na $12 + 16 = 28$ sposobów (zgodnie z regułą dodawania).
Rozwiązanie zadania możesz przedstawić za pomocą działania: $4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 28$.

11.2.12. Pierwszy
a czwarty 4. Tak w

11.2.13.
a) Jedna. To liczb
b) Mogą to być ty
zero, a na miej
400, 500, 600, 7
c) Jedno zero mog
dwucyfrowych
ną od zera, a n
Wśród liczb tr
Rozważ przypa
wstawienia cyfr
ności. Wszystk
jest $9 \cdot 9 = 81$ (
wisz zero, a poz
wszystkich moż

11.2.14.
I sposób:
Policz wszystkie lic
z dwóch miejsc mo
Teraz policz wszyst
Tym razem na każd
jest 64 ($8 \cdot 8$). Szuk
rych nie występuje
Zatem liczb, o któr

II sposób:
Najpierw policz licz
cić ją na jednym z
z ośmiu cyfr; masz
ba, w której występ
$16 + 1 = 17$ liczb.

11.2.15. Możesz zilus
mie.
Najpierw zaznacza
wszystkich trzech
Potem tych, którzy
$28 - 2 = 26$.
Tylko do Europy i A

11.2.12. Pierwszy pasażer ma siedem miejsc do wyboru, drugi już tylko 6, trzeci 5, a czwarty 4. Tak więc tych sposobów jest $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

11.2.13.

a) Jedna. To liczba 1000.

b) Mogą to być tylko liczby trzycyfrowe, które na miejscu dziesiątek i jedności mają zero, a na miejscu setek dowolną cyfrę różną od zera. Jest ich 9. (100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 i 900).

c) Jedno zero mogą mieć zarówno liczby dwucyfrowe, jak i trzycyfrowe. Wśród liczb dwucyfrowych będą to liczby, które na miejscu dziesiątek mają dowolną cyfrę różną od zera, a na miejscu jedności mają zero. Takich liczb jest 9 (10, 20, 30,... itd). Wśród liczb trzycyfrowych zero jest albo na miejscu dziesiątek, albo jedności. Rozważ przypadek, kiedy na miejscu dziesiątek jest zer. Wtedy masz 9 możliwości wstawienia cyfry na miejsce setek i 9 możliwości wstawienia cyfry na miejsce jedności. Wszystkich liczb trzycyfrowych, które będą miały 0 na miejscu dziesiątek, jest $9 \cdot 9 = 81$ (np. 102, 103, 905, itd.). Podobnie, jeśli na miejsce jedności wstawisz zero, a pozostałe miejsca będą wolne, to możesz otrzymać $9 \cdot 9 = 81$. Łącznie wszystkich możliwości jest $81 + 81 + 9 = 171$.

11.2.14.

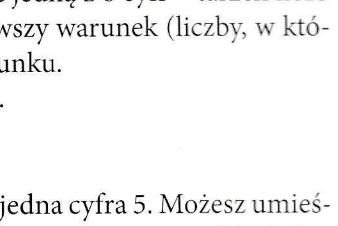
I sposób:

Policz wszystkie liczby dwucyfrowe, w których nie występuje cyfra zero. Na każdym z dwóch miejsc możesz umieścić jedną z 9 cyfr; łącznie jest więc $9 \cdot 9 = 9^2 = 81$ liczb. Teraz policz wszystkie liczby dwucyfrowe, w których nie występuje ani cyfra 0, ani 5. Tym razem na każdym z dwóch miejsc możesz umieścić jedną z 8 cyfr – takich liczb jest 64 ($8 \cdot 8$). Szukasz takich liczb, które spełniają pierwszy warunek (liczby, w których nie występuje cyfra 0) i nie spełniają drugiego warunku.
Zatem liczb, o które chodzi w zadaniu, jest $81 - 64 = 17$.

II sposób:

Najpierw policz liczby dwucyfrowe, w których jest tylko jedna cyfra 5. Możesz umieścić ją na jednym z dwóch miejsc. Na pozostałym miejscu możesz umieścić jedną z ośmiu cyfr; masz więc łącznie $2 \cdot 8 = 16$ takich liczb. Oprócz tego jest jedna liczba, w której występują dwie piątki. Skorzystaj teraz z reguły dodawania, łącznie jest $16 + 1 = 17$ liczb.

11.2.15. Możesz zilustrować wyniki ankiet na diagramie.



Najpierw zaznaczasz tych, którzy podróżowali po wszystkich trzech kontynentach. Są 2 takie osoby. Potem tych, którzy wyjechali do Europy i Azji:
$28 - 2 = 26$.
Tylko do Europy i Ameryki wyjechało $8 - 2 = 6$ osób.

Tylko do Azji i Ameryki wyjechały 6 – 2 = 4 osoby.
Tylko do Europy wyjechało 93 – 26 – 2 – 6 = 59 osób.
Tylko do Azji wyjechało 12 osób. Tylko do Ameryki wyjechało 16 – 6 – 2 – 4 = 4 osoby.

a) Od liczby wszystkich ankietowanych trzeba odjąć sumę 93 + 12 + 4 + 4 = 113. 37 ankietowanych nie wyjechało na żaden wymieniony kontynent.
b) Na jeden kontynent wyjechało 59 + 12 + 4 = 75 osób.
c) Na dwa kontynenty wyjechało 6 + 4 + 26 = 36 osób.

11.2.16. Ustaw najpierw panów, a potem panie w czterech miejscach pomiędzy panami. Panów można ostawić na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ sposobów, a panie na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby. Odpowiedzią jest liczba $120 \cdot 24 = 2880$.

11.2.17. Najpierw ustal, ile masz możliwości wyboru przewodniczącego (14, bo wybierasz spośród 14 dziewcząt). Zastępcę przewodniczącego możesz wybrać spośród 15 osób (bo wybierasz spośród 15 chłopców), a skarbnika spośród pozostałych 27 osób. Zatem możliwości wyboru jest $14 \cdot 15 \cdot 27 = 5670$.
Odpowiedź: Samorząd klasowy można wybrać na 5670 sposobów.

11.2.18. Przy wyborze delegacji nie jest ważna kolejność wyboru, dlatego wynik $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 570\,024$ trzeba podzielić przez liczbę przestawień trzech osób: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Odpowiedź: Delegację można wybrać na 23 751 sposobów.

11.2.19. Uczeń losuje pierwsze pytanie spośród 10 pytań, drugie z pozostałych 9, trzecie z 8 i czwarte spośród siedmiu pytań.
Zatem: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Nie jest ważna kolejność losowania poszczególnych zadań, dlatego otrzymany wynik trzeba podzielić przez liczbę ustawień czterech zadań:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Odpowiedź: Uczeń może wylosować zestaw pytań na 210 sposobów.

11.2.20. Każda z dwunastu osób wysłała jedenaście kartek, więc razem było
$12 \cdot 11 = 132$.
Odpowiedź: Wysłano 132 kartki.

11.2.21. Przy uścisku dłoni nie jest ważna kolejność wyboru, dlatego otrzymany wynik $12 \cdot 11 = 132$ dzielimy przez liczbę ustawień $1 \cdot 2 = 2$.
Odpowiedź: Było 66 powitań.

11.2.22.
a) Oblicz liczbę sposobów losowań. W torebce jest 40 numerków, więc Tomek losował pierwszy numerek spośród 40, następny – spośród 39 itd. Ogółem $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37$. Przy jednoczesnym wyciąganiu czterech numerków nie jest ważna

kolejność losow
wień czterech el
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Odpowiedź: 91
b) Spośród 16 zielo
$\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} \cdot \frac{24 \cdot 23}{1 \cdot 2} =$
Odpowiedź: Jest

11.2.23. Pierwszy z
jeden z dwóch, a tr
cze czterech członk
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Raz
Odpowiedź: D.

11.2.24.
I sposób: Każda z 1
ność nie jest istotna

II sposób:
Pierwsza drużyna r
Obliczenia: 11 + 10

11.2.25. W koszu jes
na wylosowaniu ziel
$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.
Odpowiedź: $\frac{1}{3}$.

11.2.26. Można było
wylosujesz na $6 \cdot 6 =$
bów, a dwie świnie n
Odpowiedź: Są 44 sz

11.2.27. Przekształć n
$\log_2 \frac{1}{2} = -1;\ 2^{-3} = \frac{1}{8}$
liczby wymierne.
Odpowiedź: $\frac{1}{2}$.

kolejność losowania, więc otrzymany wynik trzeba podzielić przez liczbę przestawień czterech elementów:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Odpowiedź: 91 390.

b) Spośród 16 zielonych mają być wylosowane 2 numerki i spośród 24 czerwonych 2.
$$\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} \cdot \frac{24 \cdot 23}{1 \cdot 2} = 33\,120$$
Odpowiedź: Jest 33 120 różnych sposobów wylosowania.

11.2.23. Pierwszy z juniorów otrzymuje jeden z trzech numerów (3, 5 lub 7), drugi jeden z dwóch, a trzeci ostatni wolny. Jest więc $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ możliwości. Jest jeszcze czterech członków załogi i liczba możliwości przydziału im numerów jest równa $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Razem jest $6 \cdot 24 = 144$ możliwości.
Odpowiedź: D.

11.2.24.
I sposób: Każda z 12 drużyn rozgrywa mecz z jedną z pozostałych 11 drużyn. Kolejność nie jest istotna, więc liczbę dzielimy przez dwa: $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.

II sposób:
Pierwsza drużyna rozegra 11 meczy, druga 10, trzecia 9 itd.
Obliczenia: $11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66$.

11.2.25. W koszu jest w sumie 36 piłek. Zatem $|\Omega| = 36$. Zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu zielonej piłki sprzyja 12 zdarzeń elementarnych. $|A| = 12$.
$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$
Odpowiedź: $\frac{1}{3}$.

11.2.26. Można było wylosować dwa króliki, dwie owce lub dwie świnie. Dwa króliki wylosujesz na $6 \cdot 6 = 36$ sposobów. Dwie owce możesz wylosować na $3 \cdot 2 = 6$ sposobów, a dwie świnie na 2 sposoby. Wszystkich możliwości jest 44.
Odpowiedź: Są 44 szanse na wylosowanie dwóch jednakowych zwierząt.

11.2.27. Przekształć niektóre liczby do postaci, która ułatwi Ci wnioskowanie.
$\log_2 \frac{1}{2} = -1$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4$. W podanym zestawie liczb są 4 liczby wymierne.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$.

11.2.28. Jeżeli z talii kart losujesz dwie, to pierwszą wybierasz na 52 sposoby, a drugą na 51 sposobów. Kolejność nieważna, więc wynik trzeba podzielić przez 2.

Zatem $|\Omega| = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$.

a) W talii jest 13 kierów, więc dwa wybierzesz na $\frac{13 \cdot 12}{2}$ sposoby.

Jeżeli literą A oznaczysz zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kierów, to $|A| = 78$.

$P(A) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$.

b) Zdarzeniu B polegającemu na wylosowaniu 2 figur sprzyja $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ zdarzeń elementarnych. $P(B) = \frac{120}{1326} = \frac{20}{221}$.

11.2.29. $P(F \cup N) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Z drugiej strony obowiązuje wzór ogólny $P(F \cup N) = P(F) + P(N) - P(F \cap N)$, co daje wzór, w którym niewiadomą jest tylko szukana wielkość.

$\frac{5}{6} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - P(F \cap N)$

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$.

11.2.30. Pierwszą cyfrę wybierasz spośród sześciu cyfr, a drugą spośród pięciu. Zatem wszystkich możliwości jest 30.

$|\Omega| = 30$. Łatwiej ustalić, ile elementów ma zdarzenie przeciwne polegające na tym, że za pierwszym i drugim razem wybrano cyfrę podzielną przez 3. Są tylko dwie takie możliwości $A' = \{(3, 6), (6, 3)\}$. Zatem $|A'| = 2$, $P(A') = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

$P(A) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

Odpowiedź: $P(A) = \frac{14}{15}$.

11.2.31. Sporządź tabelkę obrazującą przebieg tego doświadczenia losowego. Jak widać, $|\Omega| = 36$, $|A| = 17$, więc $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Odpowiedź: $P(A) = \frac{17}{36}$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

11.2.32. Sporządź tabelkę obrazującą przebieg tego doświadczenia losowego. Jak widać, $|\Omega| = 36$, $|A| = 9$, więc $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0
3	0	1	9	3	0	1
4	1	2	3	0	1	2
5	2	3	0	1	2	3
6	3	0	1	2	3	0

11.2.33. Oznacz: A – wybranie biologii, B – wybranie geografii, $A \cup B$ – wybranie biologii lub geografii.
Biologię zadeklarowało $0{,}375 \cdot 24 = 9$ uczniów. Geografię zadeklarowało $0{,}5 \cdot 24 = 12$ uczniów, z których 6 wybrało także biologię. A więc tych, którzy wybrali biologię lub geografię, było $9 + 12 - 6 = 15$.

$$P(A \cup B) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Możesz obliczyć prawdopodobieństwo bez obliczania liczby uczniów zdających biologię, geografię lub oba te przedmioty. Wystarczy skorzystać z wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, gdzie $P(A) = 0{,}375$, $P(B) = 0{,}5$ i $P(A \cap B) = 0{,}25$.
$P(A \cup B) = 0{,}375 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}625$
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń wybrał biologię lub geografię, jest równe 0,625.

11.2.34.

A. Jeżeli ciąg liczb zaczyna się od liczby podzielnej przez 4, to wśród sześciu takich liczb znajdzie się jeszcze jedna podzielna przez 4. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest zatem mniejsze lub równe $\frac{1}{3}$. Nie jest to odpowiedź prawdziwa.

B. W żadnym wypadku wśród sześciu kolejnych liczb nie znajdzie się więcej niż 2 podzielne przez 5.

C. Nie jest możliwe, aby w takim zestawie znalazły się trzy liczby podzielne przez 3.

D. W zestawie kolejnych sześciu liczb jest po jednej liczbie postaci: $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$, $6n + 3$, $6n + 4$, $6n + 5$. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 6 jest równe $\frac{1}{6}$.

Odpowiedź: D.

11.2.35. Oznacz A – zdarzenie polegające na wylosowaniu asa, B – zdarzenie polegające na wylosowaniu karty czarnej. Wtedy $A \cup B$ oznaczać będzie zdarzenie polegające na wylosowaniu asa lub karty czarnej, a $A \cap B$ – zdarzenie polegające na wylosowaniu czarnego asa. Wszystkich możliwości było 32, więc $P(A) = \frac{4}{32}$, $P(B) = \frac{16}{32}$ i $P(A \cap B) = \frac{2}{32}$.

$$P(A \cup B) = \frac{4}{32} + \frac{16}{32} - \frac{2}{32} = \frac{9}{16}$$

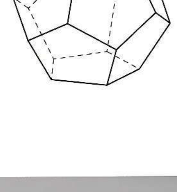
Odpowiedź: $\frac{9}{16}$.

11.2.36. Na pierwszym miejscu musi być cyfra 1, bo inaczej liczba nie będzie pięciocyfrowa. Na każdym z pozostałych miejsc można wstawić jedną z dwóch cyfr 0 lub 1. Zatem $|\Omega| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Liczba podzielna przez 3 musi mieć w zapisie cyfrę 1 użytą 3 razy i cyfrę 0 użytą dwa razy (suma cyfr ma być podzielna przez 3). Jeżeli drugą jedynkę wstawisz na drugim miejscu, to masz trzy miejsca, na których możesz umieścić trzecią jedynkę. Jeśli na drugim miejscu wstawisz zero, to masz trzy możliwości umieszczenia drugiego zera. Razem tych możliwości jest 6. Jeśli literą A oznaczysz zdarzenie polegające na tym, że wylosowano liczbę podzielną przez 3, to $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{8}$.

11.2.37. $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Na trzech pierwszych miejscach można trzy powieści ustawić na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sposobów. Na czwartym miejscu wstawiamy jedną z dwóch pozostałych powieści i na ostatnie wolne miejsce wstawiamy ostatnią powieść.
Zatem $|A| = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.
Odpowiedź: $P(A) = 0{,}1$.

11.2.38. Dwanaście ścian po pięć wierzchołków, to 60. Każdy wierzchołek należy do trzech ścian, więc wszystkich wierzchołków jest 20. Dwunastościan składa się z dwunastu pięciokątnych ścian,



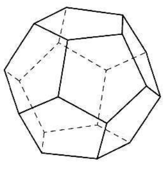
by podzielne przez 3.
aci: $6n$, $6n+1$, $6n+2$,
ania liczby podzielnej

– zdarzenie polegają-
zdarzenie polegające
olegające na wyloso-
$A) = \frac{4}{32}$, $P(B) = \frac{16}{32}$

ba nie będzie pięcio-
z dwóch cyfr 0 lub 1.
mieć w zapisie cyfrę
zielna przez 3). Jeżeli
jsca, na których mo-
sz zero, to masz trzy
ci jest 6. Jeśli literą A
podzielną przez 3, to

ch można trzy powie-
wiamy jedną z dwóch
tatnią powieść.

ierz-
ków
cian,

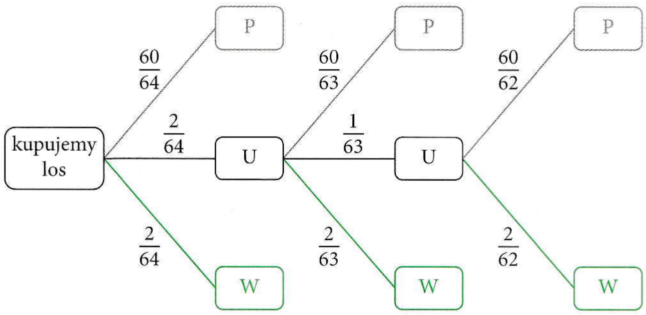


a więc liczba krawędzi jest równa $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ (krawędź AB i BA to ta sama krawędź).

Wybierając pierwszy spośród wszystkich dwudziestu wierzchołków, masz 20 możliwości, a drugi 19. Kolejność jest nieistotna, więc wynik musisz podzielić przez 2. A więc $|\Omega| = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$. Jeżeli zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch wierzchołków, które należą do tej samej krawędzi dwunastościanu oznaczysz przez A, to $|A| = 30$ i $P(A) = \frac{30}{190} = \frac{3}{19}$.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{19}$.

11.2.39. Zilustruj przebieg doświadczenia za pomocą drzewa.
Oznacz:
P – wylosowanie losu przegrywającego;
U – wylosowanie losu uprawniającego do następnego losowania;
W – wylosowanie losu wygrywającego.

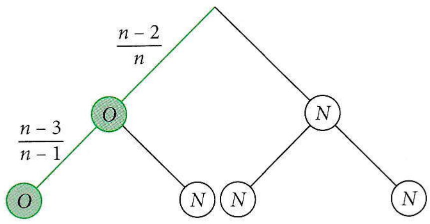


W tym przypadku zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo wygrania to suma prawdopodobieństw wygrania za pierwszym razem $\left(\frac{2}{64}\right)$, za drugim razem $\left(\frac{2}{64} \cdot \frac{2}{63}\right)$, lub za trzecim razem $\left(\frac{2}{64} \cdot \frac{1}{63} \cdot \frac{2}{62}\right)$.
Oto całe działanie pozwalające obliczyć szukane prawdopodobieństwo:

$$P(W) = \frac{2}{64} + \frac{2}{64} \cdot \frac{2}{63} + \frac{2}{64} \cdot \frac{1}{63} \cdot \frac{2}{62} = \frac{1}{31}.$$

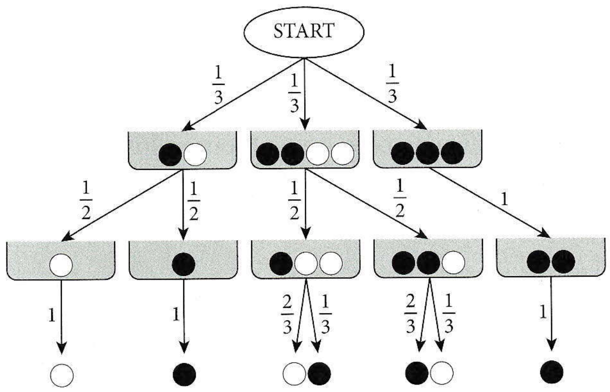
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wygrania w loterii jest równe $P(W) = \frac{1}{31}$.

11.2.40. Przebieg doświadczenia losowego możesz zilustrować za pomocą drzewka. Na zielono zaznaczono istotną gałąź i tylko tam wpisano prawdopodobieństwa. Rozwiąż równanie: $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} = \frac{15}{22}$, gdzie $n > 1$.



Po przekształceniu otrzymasz równanie kwadratowe.
$7n^2 - 95n + 132 = 0$
Odpowiedź: $n = 12$.

11.2.41. Narysuj drzewko:



A teraz wykonaj obliczenia.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Odpowiedź: $\frac{8}{27}$.

Zestaw

1. Wyznacz median
A. $M = 13$ i $d = 12$;
C. $M = 12$ i $d = 13$;

2. Średnia arytmety
Wynika stąd, że:
A. $x = 16$;

3. Zbiór wyników
Jak zmieniło się odc
A. Ani średnia, ani
B. Średnia się nie z
C. Średnia i odchyl
D. Średnia się nie z

4. Średnia arytmety
1, x, 3, y, 5, 6, 7 jest
A. $x = 1$ i $y = 5$;

5. Karol dostał z ge

Aby dostać ocenę 4
co najmniej 3,6. Z j
koniec semestru?
A. 1; B. 2

6. Kłódka rowerowa
po 10 cyfr. Jedno z
tego zamka?
A. 39;

7. Rzucono dwa razy
rych za drugim raz
szym?
A. 6;