

# 4. RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

## 4.1. Równania, nierówności i układy równań pierwszego stopnia

4.1.1. Rozwiąż równania:

a)  $5x + 2,5 = 0$ ;

c)  $2\sqrt{2}x - 2 = 0$ ;

e)  $3a + 2 - 4a = 7 - 3a$ ;

g)  $5 - [(8x + 3) - 18x] = 9x$ ;

i)  $\frac{2x + 3}{6} = 1$ ;

k)  $\frac{1}{2}(2x - 15) = \frac{3}{4}(28 - 6x)$ ;

m)  $(4x + 2)^2 = (8x - 1)(2x + 1)$ .

b)  $-21,5x + 34 = -9$ ;

d)  $5(2x - 5) = 3(2x + 3)$ ;

f)  $6x - 1 = 12x + 8$ ;

h)  $\frac{6}{2\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{10}}$ ;

j)  $\frac{x - 4}{6} = \frac{10}{3}$ ;

l)  $(6x - 2)^2 + 2x - 12 = 4 + 36x^2$ ;

4.1.2. Rozwiązaniem równania  $ax + 5(x - 3) = 27$  jest liczba  $x = 6$ . Współczynnik  $a$  jest równy:

A. 2;

B. 4;

C. -2;

D. 0.

4.1.3. Sprawdź, czy liczba 1 jest rozwiązaniem równania:

$$5x^2 - x(2 + x) = (4x - 2)(x - 8) + 2(x + 15).$$

4.1.4. Sprawdź, czy liczba -2 jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{3} - 6x = \frac{(2 - x)(2 + x)}{2} + \frac{5x^2 - x}{6} + 9.$$

4.1.5. Dla jakiej wartości  $m$  rozwiązaniem równania  $5x + 7m = 28$  z niewiadomą  $x$  jest liczba 7?

4.1.6. Rozwiąż nierówności:

a)  $\frac{3x - 1}{6} + \frac{x + 2}{3} < 2$ ;

b)  $\frac{4 + x}{2} + \frac{x - 1}{6} > 1$ ;

c)  $x \leq 0,4x + 3,6$ ;

d)  $(x - 1)(x + 1) > \frac{2(x - 2)^2 + (x + 3)^2}{3}$ ;

e)  $0,05x + 0,03(2x + 1) \geq 18,62$ ;

f)  $3x - 2 < x - 2(x - 8)$ ;

g)  $-7x \leq -2,1$ ;

h)  $5(x + 2) + 4 < x + 2(7 - x)$ ;

i)  $-3(z - 5) < 2(z - 8)$ ;

j)  $4(2x - 5) - 3(2x - 1) \geq 0$ .

**4.1.7.** Rozwiąż nierówność:  $\frac{4(x + 1)}{5} - 1 > \frac{2(x - 1)}{3}$ .

**4.1.8.** Rozwiąż nierówność:  $2(x + 4)^2 + 3(x - 5)(x + 5) < 5(x - 2)^2 + 30$ . Ile liczb całkowitych dodatnich ją spełnia?

**4.1.9.** Rozwiąż nierówność:  $(3 + \sqrt{7})(\sqrt{7} - x) \leq 2\sqrt{7} + 7$ . Jaka jest najmniejsza liczba całkowita, która ją spełnia?

**4.1.10.** Ile liczb pierwszych jest rozwiązaniem nierówności:  $(x + 2)^2 \leq (x - 3)^2 + 25$ ?  
A. 1;                      B. 2;                      C. 3;                      D. nieskończenie wiele.

**4.1.11.** Sprawdź, która spośród liczb:  $-4, 4, \log_2 32, 2\sqrt{6}$  nie jest rozwiązaniem nierówności:  $\frac{1}{4}(x + 8) + \frac{1}{6}(x + 12) \leq 6$ .

**4.1.12.** Radek startował w cyklu biegów przełajowych na 5 km. W czterech pierwszych etapach uzyskał czasy odpowiednio 24, 22, 23, 21 minut. Jaki czas musi uzyskać w piątym etapie, aby średni czas ze wszystkich etapów był nie większy niż 22 minuty?

**4.1.13.** Iloraz inteligencji (IQ) obliczamy, dzieląc wiek umysłowy (wskazany przez standardowe testy) przez wiek życia i mnożąc ten stosunek przez 100:  $IQ = \frac{w_u}{w_z} \cdot 100$ .

Jaki jest zakres wieku umysłowego pewnej grupy dwudziestolatków, jeśli ich IQ mieści się między 125 a 140?

**4.1.14.** Rozwiąż nierówność:  $23 - [(4x - 2) - 11x] < 12x$ .

**4.1.15.** Rozwiąż nierówność:  $(4x + 1)^2 - x > 11 + 2x + 16x^2$ .

**4.1.16.** Rozwiąż nierówność:  $\frac{3x - 1}{3} - \frac{x - 7}{2} \leq \frac{2 - 4x}{6} + 7,5$ .

**4.1.17.** Rozwiąż m

**4.1.18.** Wyznacz w

$(2x - 5)^2 - 5x^2 + (x$

**4.1.19.** Damian n

określa odpowiedź

od Alana?"

A.  $28 - x < 2(9 - x$

C.  $2(28 - x) > (9 -$

**4.1.20.** Szerokość

naturalnymi długo

ścienia było mniej

**4.1.21.** Który z p

układu równań:  $\begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

A.  $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x - 15 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x + 15 - 9x \end{cases}$

**4.1.22.** Rozwiąż u

a)  $\begin{cases} 2x + 9y = 10 \\ 6x - 9y = 22 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 3x + y = 30 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$

**4.1.23.** Do danego

a)  $\begin{cases} 2x - y = 12 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 3x - 7y = 4 \end{cases}$



**4.1.17.** Rozwiąż nierówność:  $(2x + 5)^2 > 4x^2 + 10x$ .

**4.1.18.** Wyznacz wszystkie liczby pierwsze spełniające nierówność:

$$(2x - 5)^2 - 5x^2 + (x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11}) \geq -66.$$

**4.1.19.** Damian ma 28 lat, a jego syn Alan ma 9 lat. Wybierz nierówność, która określa odpowiedź na pytanie: „Ile lat temu Damian był więcej niż dwa razy starszy od Alana?”

A.  $28 - x < 2(9 - x)$ ;

B.  $28 - x > 2(9 - x)$ ;

C.  $2(28 - x) > (9 - x)$ ;

D.  $28 + x > 2(9 + x)$ .

**4.1.20.** Szerokość pierścienia kołowego jest równa 4 cm. Oblicz wyrażone liczbami naturalnymi długości promieni okręgu zewnętrznego i wewnętrznego, aby pole pierścienia było mniejsze od  $112\pi \text{ cm}^2$ , a większe od  $80\pi \text{ cm}^2$ .

**4.1.21.** Który z poniższych układów równań można otrzymać po przekształceniu

układu równań: 
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} ?$$

A. 
$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x - 15 = 1 \end{cases}$$

B. 
$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x + 15 = 1 \end{cases}$$

C. 
$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x + 15 - 9x = 1 \end{cases}$$

D. 
$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x - 15 + 9x = 1 \end{cases}$$

**4.1.22.** Rozwiąż układy równań:

a) 
$$\begin{cases} 2x + 9y = 10 \\ 6x - 9y = 22 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 6x - y = 12 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2y - 6x = 1 \\ y = 13 - 2x \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 3x + y = 30 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$$

**4.1.23.** Do danego równania dopisz drugie, aby układ nie miał rozwiązania.

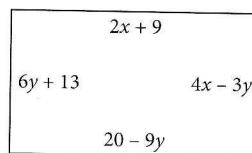
a) 
$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 16x + 12y = 0 \\ \end{cases}$$

**4.1.24.** Oblicz obwód prostokąta przedstawionego na rysunku.



**4.1.25.** Boki trójkąta  $ABC$  zawierają się w prostych o równaniach:  $2x + y - 1 = 0$ ,  $y = x + 1$ ,  $x + 2y - 8 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta  $ABC$ .

**4.1.26.** W jednym stopie stosunek miedzi do cynku jest równy  $2 : 3$ , a w drugim  $3 : 7$ . Ile kg każdego z tych stopów należy wziąć, aby otrzymać 12 kg stopu o stosunku miedzi do cynku równym  $3 : 5$ ?

**4.1.27.** Ile rozwiązań ma układ równań:  $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 6x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ ?

**4.1.28.** Boki trójkąta  $ABC$  zawierają się w prostych o równaniach:  $y = 2x + 5$ ,  $3x - y + 14 = 0$ ,  $3y - x - 10 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.

**4.1.29.** Który z układów jest sprzeczny?

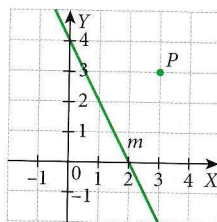
A.  $\begin{cases} y = (\sqrt{2} + 1)x + 13 \\ y = \left(\frac{2}{\sqrt{2} - 1}\right)x - 8 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} y = (\sqrt{2} + 1)x - 1 \\ y = \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right)x + 4 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} y = (\sqrt{5} + 2)x - 7 \\ y = \left(\frac{2}{\sqrt{5} - 2}\right)x + 5 \end{cases}$

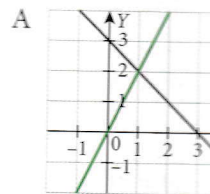
D.  $\begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)x - 4 \\ y = (\sqrt{2} + 1)x - 4 \end{cases}$

**4.1.30.** Na rysunku przedstawiona jest prosta  $m$  i punkt  $P$ . Narysuj prostą  $l$  przechodzącą przez punkt  $P$  tak, aby proste  $k$  i  $l$  były ilustracją graficzną układu równań o rozwiązaniu  $x = 1$  i  $y = 2$ .



**4.1.31.** Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez proste o równaniach:  $y = 2x - 6$  i  $x + 2y = 8$  oraz oś  $OY$ .

**4.1.32.** Który z r...



**4.1.33.** Napisz u...  
tryczną przedstaw

**4.1.34.** Napisz u...  
tryczną przedstaw

**4.1.1.**

- a)  $5x + 2,5 = 0$ ;
- b)  $-21,5x + 34 = -$

c)  $2\sqrt{2}x = 2 \quad / \cdot \sqrt{2}$

d)  $10x - 25 = 6x +$

e)  $3a + 2 - 4a = 7 -$

f)  $6x - 1 = 12x + 8$

g)  $5 - [(8x + 3) - 1$

$2x + 9$	
$6y + 13$	$4x - 3y$
$20 - 9y$	

niach:  $2x + y - 1 = 0$ ,  
trójkąta  $ABC$ .

ny  $2 : 3$ , a w drugim  
2 kg stopu o stosunku

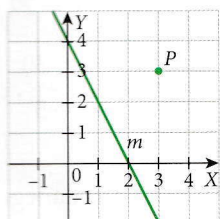
nianach:  $y = 2x + 5$ ,  
ołówków trójkąta.

-1

+4

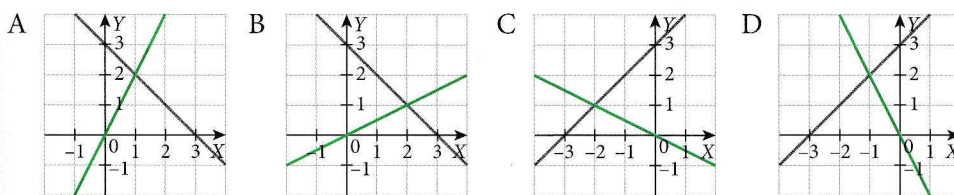
-4

-4

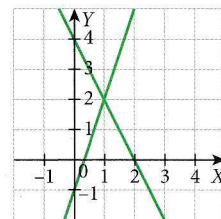


ównaniach:  $y = 2x - 6$

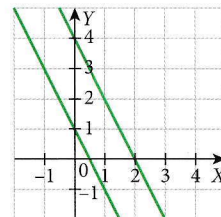
**4.1.32.** Który z rysunków jest graficzną ilustracją układu  $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - x = 3 \end{cases}$ ?



**4.1.33.** Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



**4.1.34.** Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



### Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

**4.1.1.**

a)  $5x + 2,5 = 0$ ;  $5x = -2,5$ ;  $x = -0,5$ ;

b)  $-21,5x + 34 = -9$ ;  $-21,5x = -43$ ;  $x = 2$ ;

c)  $2\sqrt{2}x = 2 \quad | : \sqrt{2}$ ;  $4x = 2\sqrt{2} \quad | : 4$ ;  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

d)  $10x - 25 = 6x + 9$ ;  $4x = 34$ ;  $x = 8,5$ ;

e)  $3a + 2 - 4a = 7 - 3a$ ;  $2a = 5$ ;  $a = 2,5$ ;

f)  $6x - 1 = 12x + 8$ ;  $-6x = 9$ ;  $x = -1,5$ ;

g)  $5 - [(8x + 3) - 18x] = 9x$ ;  $5 - (8x + 3 - 18x) = 9x$ ;  $5 + 10x - 3 = 9x$ ;  $x = -2$ ;



h)  $\frac{6}{2\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{10}}$ ;  $6\sqrt{10} = 2\sqrt{5}x \quad /: 2\sqrt{5}; \quad 3\sqrt{2} = x;$

i)  $\frac{2x+3}{6} = 1;$  pomnóż obie strony równania przez 6;  $x = 1,5;$

j)  $\frac{x-4}{6} = \frac{10}{3} \quad / \cdot 6; \quad x-4 = 20 \quad /+ 4; \quad x = 24;$

k)  $\frac{1}{2}(2x-15) = \frac{3}{4}(28-6x) \quad / \cdot 4; \quad 2(2x-15) = 3(28-6x); \quad 4x-30 = 84-18x;$

$22x = 114; \quad x = \frac{57}{11};$

l)  $(6x-2)^2 + 2x - 12 = 4 + 36x^2; \quad 36x^2 - 24x + 4 + 2x - 12 = 4 + 36x^2; \quad -22x = 12;$

$x = \frac{-6}{11};$

m)  $(4x+2)^2 = (8x-1)(2x+1); \quad 16x^2 + 16x + 4 = 16x^2 + 8x - 2x - 1; \quad 10x = -5;$

$x = \frac{-1}{2}.$

4.1.2. Podstaw 6 w miejsce  $x$ .  $6a + 5(6 - 3) = 27$ . Stąd:  $6a = 12$ , więc  $a = 2$ .

Odpowiedź: A.

4.1.3. Podstaw 1 w miejsce  $x$  i sprawdź, czy lewa strona równania jest równa prawej.

Odpowiedź:  $L = 2$  i  $P = 18$ , więc  $L \neq P$  i liczba 1 nie jest rozwiązaniem danego równania.

4.1.4. Lewa strona równania  $L = \frac{2}{3} + 12$ . Prawa strona równania  $P = \frac{22}{6} + 9$ .  $L = P$ .

Odpowiedź: Tak.

4.1.5.

$35 + 7m = 28$

$7m = 28 - 35$

$7m = -7$

Podstaw liczbę 7 w miejsce  $x$ .

Otrzymasz równanie z niewiadomą  $m$ . Rozwiąż je.

Odpowiedź:  $m = -1$ .

4.1.6. Rozwiąż nierówności:

a)  $\frac{3x-1}{6} + \frac{x+2}{3} < 2$

$3x-1 + 2x+4 < 12$

$x < \frac{9}{5}$

Pomnóż obie strony nierówności przez 6.

$x \in \left(-\infty, \frac{9}{5}\right)$

b)  $\frac{4+x}{2} + \frac{x-1}{6}$

$3(4+x) + x -$

$x > \frac{-5}{4}$

c)  $x \leq 0,4x + 3,6$

$0,6x \leq 3,6$

d)  $(x-1)(x+1)$

$3(x^2-1) > 2(x$

$x > 10$

e)  $0,05x + 0,03(2$

$x \geq 169$

f)  $3x - 2 < x - 2$

g)  $-7x \leq -2,1$

$x \geq 0,3$

h)  $5x + 14 < x +$

$x < 0$

i)  $-3z + 15 < 2z$

j)  $8x - 20 - 6x +$

4.1.7.

$\frac{4 \cdot 15(x+1)}{5} - 15$

$12(x+1) - 15 > 1$

$12x + 12 - 15 > 1$

$2x > -7$

$x > -\frac{7}{2}$

$$b) \frac{4+x}{2} + \frac{x-1}{6} > 1$$

$$3(4+x) + x - 1 > 6$$

$$x > \frac{-5}{4}$$

$$c) x \leq 0,4x + 3,6$$

$$0,6x \leq 3,6$$

$$d) (x-1)(x+1) > \frac{2(x-2)^2 + (x+3)^2}{3}$$

$$3(x^2 - 1) > 2(x^2 - 4x + 4) + x^2 + 6x + 9$$

$$x > 10$$

$$e) 0,05x + 0,03(2x + 1) \geq 18,62$$

$$x \geq 169$$

$$f) 3x - 2 < x - 2(x - 8)$$

$$g) -7x \leq -2,1$$

$$x \geq 0,3$$

$$h) 5x + 14 < x + 14 - 2x$$

$$x < 0$$

$$i) -3z + 15 < 2z - 16$$

$$j) 8x - 20 - 6x + 3 \geq 0$$

Pomnóż obie strony nierówności przez 6.

$$x \in \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$$

$$x \in (-\infty, 6)$$

Pomnóż obie strony nierówności przez 3. Najpierw wykonaj potęgowanie po prawej stronie i mnożenie po lewej stronie nierówności

$$x \in (10, \infty)$$

Dla ułatwienia możesz pomnożyć obie strony nierówności przez 100.

$$x \in (169, \infty)$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right)$$

Gdy dzielisz obie strony nierówności przez liczbę ujemną, musisz zmienić jej zwrot.

$$x \in (0,3; \infty)$$

$$x \in (-\infty, 0)$$

$$x \in \left(\frac{31}{5}, \infty\right)$$

$$x \in \left(\frac{17}{2}, \infty\right)$$

#### 4.1.7.

$$\frac{4 \cdot 15(x+1)}{5} - 15 > \frac{15 \cdot 2(x-1)}{3}$$

$$12(x+1) - 15 > 10(x-1)$$

$$12x + 12 - 15 > 10x - 10$$

$$2x > -7$$

$$x > -\frac{7}{2}$$

Pomnóż obie strony nierówności przez wspólny mianownik. W tym wypadku jest to 15.

Skróć ułamki.

Wykonaj działania po obu stronach nierówności.

Odejmij od obu stron  $10x$  i dodaj 3.

Odpowiedź: Rozwiązaniem są wszystkie liczby

rzeczywiste większe od  $\left(-\frac{7}{2}\right)$ .

**4.1.8.**

$$2(x^2 + 8x + 16) + 3(x^2 - 25) < 5(x^2 - 4x + 4) + 30$$

$$2x^2 + 16x + 32 + 3x^2 - 75 < 5x^2 - 20x + 20 + 30$$

$$5x^2 + 16x - 43 < 5x^2 - 20x + 50$$

$$36x < 93$$

$$x < 2\frac{7}{12}$$

Zastosuj wzory skróconego mnożenia:  
 $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ ,  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ,  
 a następnie wykonaj redukcję wyrazów podobnych po jednej i drugiej stronie nierówności. Przekształć do takiej postaci, aby po jednej stronie mieć wyrażenie z niewiadomą, a po drugiej – stałe.  
 Jedynymi liczbami całkowitymi dodatnimi mniejszymi od  $2\frac{7}{12}$  są 1 i 2.  
 Odpowiedź: Dwie.

**4.1.9.**

$$(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})(\sqrt{7} - x) \leq (2\sqrt{7} + 7)(3 - \sqrt{7})$$

$$(9 - 7)(\sqrt{7} - x) \leq 6\sqrt{7} - 14 + 21 - 7\sqrt{7}$$

$$2\sqrt{7} - 2x \leq 7 - \sqrt{7} \quad | -2\sqrt{7}$$

$$-2x \leq 7 - 3\sqrt{7} \quad | : -2$$

$$x \geq \frac{-7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Zauważ, że w po lewej stronie nierówności, w jednym z nawiasów współczynnik przy niewiadomej  $x$  jest liczbą całkowitą. Nie warto więc wykonywać zapisanych mnożeń, bo otrzymasz niewymierny współczynnik przy  $x$ . Możesz za to obie strony nierówności pomnożyć przez  $(3 - \sqrt{7})$ , aby skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia. Jest to liczba dodatnia, więc nie trzeba zmieniać zwrotu nierówności.  
 Odpowiedź:  $(-7)$ .

**4.1.10.**

$$(x + 2)^2 \leq (x - 3)^2 + 25$$

$$x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9 + 25$$

$$10x \leq 30$$

$$x \leq 3$$

Podnieś do kwadratu, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.  
 Są dwie liczby pierwsze spełniające tę nierówność: 2 i 3.

**4.1.11.** Przekształć nierówność do najprostszej możliwej nierówności równoważnej. Oblicz logarytm i oszacuj  $2\sqrt{6}$ . Następnie sprawdź, które z podanych liczb nie spełniają tej nierówności.

Odpowiedź:  $\log_2 32$  i  $2\sqrt{6}$ .

**4.1.12.** Rozwiąż nierówność

$x \leq 20$ .  
 Odpowiedź: Radek

**4.1.13.**  $125 \leq IQ \leq 1$

z powyższych nierówności.  
 Odpowiedź: Wiek

**4.1.14.** Odpowiedź:

**4.1.15.** Zastosuj wzór.  
 Odpowiedź:  $x > 2$ .

**4.1.16.** Pomnóż obie strony przez  $(3 - \sqrt{7})$ .  
 o tym, że kreska ułamkowa jest w nawias wyrażenia.  
 Odpowiedź:  $x \leq 4$ .

**4.1.17.**  $4x^2 + 20x + 25 \geq 0$   
 Odpowiedź: Nierówność

**4.1.18.** Zastosuj wzór skróconego mnożenia.  
 $-20x + 14 \geq -66$ , czyli  $x \leq 4$ .  
 zapominając o zwrocie.  
 Odpowiedź: Liczby

**4.1.19.** Oznacz literami  $a$  i  $b$  liczby.  
 cej niż dwa razy stała.  
 Odpowiedź: B.

**4.1.20.** Oznacz  $r$  – promień.  
 pierścienia jest wtedy  $8 < r < 12$ .  
 wyrażenie opisujące liczbę.  
 nione dwie nierówności.  
 Zatem  $8 < r < 12$ . Liczba  
 okrąg będzie miał

**4.1.21.** Jeżeli z pierścienia  
 więc od razu odrzuć.  
 nania i przekształć.  
 Odpowiedź: B.



**4.1.12.** Rozwiąż nierówność:  $\frac{24 + 22 + 23 + 21 + x}{5} \leq 22$ . Zatem:  $\frac{90 + x}{5} \leq 22$ , czyli

$$x \leq 20.$$

Odpowiedź: Radek w piątym biegu musi się postarać i pokonać dystans w 20 minut.

**4.1.13.**  $125 \leq IQ \leq 140$ , czyli  $\frac{w_u}{20} \cdot 100 \geq 125$  i  $\frac{w_u}{20} \cdot 100 \leq 140$ . Gdy rozwiążesz każdą

z powyższych nierówności, otrzymasz  $w_u \geq 25$  i  $w_u \leq 28$ , czyli:  $25 \leq w_u \leq 28$ .

Odpowiedź: Wiek umysłowy dwudziestolatków mieści się między 25 a 28 lat.

**4.1.14.** Odpowiedź:  $x > 5$ .

**4.1.15.** Zastosuj wzór skróconego mnożenia  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Odpowiedź:  $x > 2$ .

**4.1.16.** Pomnóż obie strony nierówności przez wspólny mianownik (6). Pamiętaj o tym, że kreska ułamkowa pełni rolę nawiasu, więc gdy usuniesz mianownik, weź w nawias wyrażenia znajdujące się w licznikach:  $2(3x - 1) - 3(x - 7) \leq (2 - 4x) + 45$ .

Odpowiedź:  $x \leq 4$ .

**4.1.17.**  $4x^2 + 20x + 25 > 4x^2 + 10x$ , więc  $4x^2 + 20x + 25 - 4x^2 - 10x > 0$ , zatem:  $10x > -25$ .

Odpowiedź: Nierówność spełniają wszystkie liczby rzeczywiste większe od  $-2,5$ .

**4.1.18.** Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj redukcję wyrazów podobnych:  $-20x + 14 \geq -66$ , czyli  $-20x \geq -80$ . Podziel obie strony nierówności przez  $(-20)$ , nie zapominając o zwrocie nierówności na przeciwny:  $x \leq 4$ .

Odpowiedź: Liczby pierwsze spełniające tę nierówność to: 2 i 3.

**4.1.19.** Oznacz literą  $x$  liczbę lat, które upłynęły od momentu, kiedy Damian był więcej niż dwa razy starszy od Alana.

Odpowiedź: B.

**4.1.20.** Oznacz  $r$  – promień mniejszego koła.  $R + 4$  – promień większego koła. Pole pierścienia jest wtedy równe:  $\pi(r + 4)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 8r + 16) - \pi r^2$ . Po uproszczeniu wyrażenie opisujące pole przyjmie postać:  $8\pi r + 16\pi$ . Muszą być równocześnie spełnione dwie nierówności:  $8\pi r + 16\pi > 80\pi$  i  $8\pi r + 16\pi < 112\pi$ .

Zatem  $8 < r < 12$ . Liczby naturalne spełniające ten warunek to 9, 10 i 11. Zewnętrzny okrąg będzie miał promień odpowiednio: 13, 14 i 15.

**4.1.21.** Jeżeli z pierwszego równania wyznaczysz  $y$ , to otrzymasz  $y = 3x - 5$ . Możesz więc od razu odrzucić odpowiedź C i D. Podstaw  $3x - 5$  zamiast  $y$  do drugiego równania i przekształć do odpowiedniej postaci:  $2x - 9x + 15 = 1$ .

Odpowiedź: B.

4.1.22.

a)  $\begin{cases} 2x + 9y = 10 \\ 6x - 9y = 22 \end{cases} \Rightarrow 8x = 32, \text{ więc } x = 4$

$2 \cdot 4 + 9y = 10 \Rightarrow y = \frac{2}{9}$

b)  $\begin{cases} 6x - y = 12 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow 8x = 16, \text{ więc } x = 2$

$4 + y = 4 \Rightarrow y = 0$

c)  $\begin{cases} 2y - 6x = 1 \\ y = 13 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(13 - 2x) - 6x = 1 \\ y = 13 - 2x \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2,5 \\ y = 8 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 3x + y = 30 \\ y = 4x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4x - 5 = 30 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 2y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2y - 4) + 4y = 9 \\ 2y - 4 = x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2,1 \\ x = 0,2 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 3x \\ 4x + 5(3 - 3x) = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Dodaj równania stronami.

Do równania, np. pierwszego, podstaw obliczoną wartość  $x$  i wyznacz  $y$ .

Dodaj równania stronami i wyznacz  $x$ .

Do równania, np. drugiego, podstaw obliczoną wartość  $x$  i wyznacz  $y$ .

Podstaw wyrażenie  $13 - 2x$  za  $y$  do pierwszego równania. Nie zapomnij o nawiasie.

Podstaw wyrażenie  $4x - 5$  za  $y$  do pierwszego równania.

Możesz wyznaczyć  $x$  z drugiego równania i podstawić do pierwszego.

Możesz wyznaczyć  $y$  z pierwszego równania i podstawić do drugiego.

4.1.23. Układ nie będzie miał rozwiązania, jeżeli lewa strona drugiego równania powstanie przez pomnożenie lewej strony pierwszego równania przez pewien współczynnik, ale prawa strona drugiego równania nie będzie równa iloczynowi prawej strony pierwszego równania przez ten współczynnik. Poniżej przykłady:

a)  $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3 \cdot 2x - 3 \cdot y = 17 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 0,5 \cdot 4x - 0,5 \cdot 5y = 76 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ -2 \cdot 3x - (-2 \cdot 7y) = 8 \end{cases}$

4.1.24. Rozwiąż układ

$\begin{cases} 2x + 9 = 20 - 9y \\ 6y + 13 = 4x - 3 \end{cases}$

Boki mają długość

Odpowiedź: Obwód

4.1.25. Rozwiąż układ

oraz C:  $\begin{cases} y = x + 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

Odpowiedź: A =

4.1.26. Oznacz  $x$  -

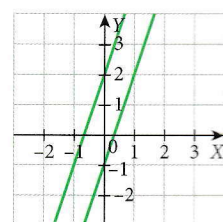
równanie otrzyma

rzysz miedz, to w p

miedz stanowi  $\frac{3}{10}$

przyjmie postać:  $\frac{2}{5}$

4.1.27.



4.1.28. Współrzędne

$\begin{cases} 3x - y + 14 = 0 \\ 3y - x - 10 = 0 \end{cases}$

$$c) \begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ -2 \cdot 3x - (-2) \cdot 7y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 16x + 12y = 0 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

**4.1.24.** Rozwiąż układ równań, porównując odpowiednie boki prostokąta.

$$\begin{cases} 2x + 9 = 20 - 9y \\ 6y + 13 = 4x - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Boki mają długości:  $6 \cdot \frac{1}{3} + 13 = 15$  i  $20 - 9 \cdot \frac{1}{3} = 17$ .

Odpowiedź: Obwód prostokąta jest równy 64.

**4.1.25.** Rozwiąż układy równań:  $A: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ ,  $B: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

oraz  $C: \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

Odpowiedź:  $A = (0, 1)$ ,  $B = (-2, 5)$ ,  $C = (2, 3)$ .

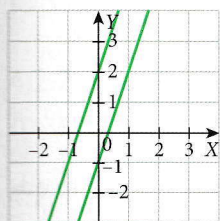
**4.1.26.** Oznacz  $x$  - liczbę kg I stopu, a  $y$  - liczbę kg II stopu. Wtedy  $x + y = 12$ . Drugie równanie otrzymasz, jeśli zastanowisz się nad ilością miedzi lub cynku. Jeśli wybierzesz miedź, to w pierwszym stopie stanowi ona  $\frac{2}{5}$  ilości tego stopu. W drugim stopie

miedź stanowi  $\frac{3}{10}$  ilości tego stopu, a w trzecim miedź stanowi  $\frac{3}{8}$ . Drugie równanie

przyjmie postać:  $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{3}{8} \cdot 12$ . Rozwiąż otrzymany układ równań.

Odpowiedź: Należy wziąć 9 kg pierwszego stopu i 3 kg drugiego.

**4.1.27.**



Sporządź wykresy obu funkcji

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

Otrzymane proste są równoległe i układ nie ma rozwiązania. Jest to układ sprzeczny.

**4.1.28.** Współrzędne punktu  $A$  wyznacysz, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 3x - y + 14 = 0 \\ 3y - x - 10 = 0 \end{cases} \text{ Możesz zastosować metodę podstawiania i wyznaczyć } y \text{ z pierw-}$$



szego równania ( $y = 3x + 14$ ) i podstawić do drugiego:  $3(3x + 14) - x - 10 = 0$ . Stąd  $x = -4$  i  $y = -12 + 14 = 2$ , więc  $A = (-4, 2)$ .

Współrzędne punktu  $B$  wyznacysz, rozwiązując układ równań  $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 3y - x - 10 = 0 \end{cases}$ ,  
 $x = -1, y = 3$ , więc  $B = (-1, 3)$ .

Współrzędne punktu  $A$  wyznacysz, rozwiązując układ równań  $\begin{cases} y = 3x + 14 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$ .

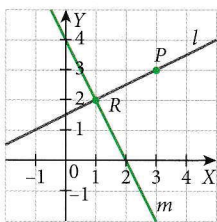
Stąd  $C = (-9, -13)$ .

Odpowiedź:  $A = (-4, 2), B = (-1, 3), C = (-9, -13)$ .

**4.1.29.** Interpretacja geometryczna układu sprzecznego to proste równoległe. Jeżeli proste są przedstawione w postaci kierunkowej, to proste są równoległe, gdy mają takie same współczynniki kierunkowe (współczynniki przy  $x$ ). Wystarczy przedstawić te współczynniki w takiej postaci, aby można było je porównać. Najprościej usunąć niewymierność z mianowników.

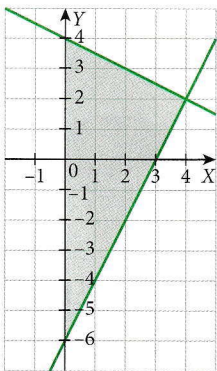
Odpowiedź: B.

**4.1.30.**



Zaznacz na rysunku punkt  $R$  o współrzędnych  $(1, 2)$ . Poprowadź prostą  $l$  przez punkty  $P$  i  $R$ .

**4.1.31.**



Wierzchołki trójkąta są punktami przecięcia odpowiednio prostych:  $y = 2x - 6$  i  $x = 0$ ,  $y = 2x - 6$  i  $x + 2y = 8$ ,  $x + 2y = 8$  i  $x = 0$ .

Rozwiąż układy równań.

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0, y = -6 \quad \quad \quad x = 4, y = 2 \quad \quad \quad x = 0, y = 4$$

Podstawa trójkąta to odcinek o długości 10, a wysokość to odcinek o długości 4.

Odpowiedź: Pole  $P = 20j^2$ .

**4.1.32.**

I sposób:  
 Rozwiąż układ  
 Otrzymasz rozwią  
 Spośród rysunkó  
 rym proste prze  
 $(-2, 1)$ .

**4.1.33.** Rozwiązana  
 $y = 2$  i obrazują g

Odpowiedź:  $\begin{cases} y = \\ y = \end{cases}$

**4.1.34.** Układ jest t

Odpowiedź:  $\begin{cases} y = \\ y = \end{cases}$

**4.2. Równ**

**4.2.1.** Rozwiąż ró

- a)  $x(x - 3) = 0$ ;
- d)  $2x(x + 7) = 0$ ;
- g)  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ;
- j)  $x^2 + 8x = 0$ ;
- m)  $3x^2 + 12x = 0$ ;
- p)  $x^2 + 14x + 49 = 0$

**4.2.2.** Wybierz ró

A.  $5x^2 + 19 = 0$ ;

**4.2.3.** Wybierz ró

A.  $x^2 - 6x + 12 = 0$

**4.2.4.** Rozwiąż ró

+ 14) - x - 10 = 0. Stąd

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 3y - x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 14 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

proste równoległe. Jeżeli  
równoległe, gdy mają ta-  
Wystarczy przedstawić  
nać. Najprościej usunąć

współrzędnych (1, 2).  
ty P i R.

przecięcia odpowiednio  
5 i  $x + 2y = 8$ ,  $x + 2y = 8$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x = 0 \\ x = 0, y = 4 \end{cases}$$

ści 10, a wysokość to od-

#### 4.1.32.

I sposób:

Rozwiąż układ równań algebraicznie.

Otrzymasz rozwiązanie  $x = -2$ ,  $y = 1$ .

Spośród rysunków wybierz ten, na którym proste przecinają się w punkcie  $(-2, 1)$ .

II sposób:

Przekształć równania do postaci

$y = -0,5x$  i  $y = x + 3$ .

Na którym rysunku masz wykresy tych funkcji?

Odpowiedź: C.

**4.1.33.** Rozwiązanie: Układ jest układem równań niezależnych o rozwiązaniu  $x = 1$ ,  $y = 2$  i obrazują go dwie proste o równaniach:

$$\text{Odpowiedź: } \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

**4.1.34.** Układ jest układem równań sprzecznych, który nie ma rozwiązania.

$$\text{Odpowiedź: } \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

## 4.2. Równania i nierówności kwadratowe

**4.2.1.** Rozwiąż równania:

a)  $x(x - 3) = 0$ ;

b)  $(x + 4)(x - 1) = 0$ ;

c)  $-3(x + 2)(x - 3) = 0$ ;

d)  $2x(x + 7) = 0$ ;

e)  $x^2 = 0$ ;

f)  $x^2 - 9 = 0$ ;

g)  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ;

h)  $2x^2 - 11x - 15 = 0$ ;

i)  $-x^2 + 3x + 180 = 0$ ;

j)  $x^2 + 8x = 0$ ;

k)  $x^2 + 5x + 6 = 0$ ;

l)  $x^2 - 49 = 0$ ;

m)  $3x^2 + 12x = 0$ ;

n)  $0,2x^2 - x = -1,2$ ;

o)  $x^2 + 6x + 9 = 0$ ;

p)  $x^2 + 14x + 49 = 0$ ;

q)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$ .

**4.2.2.** Wybierz równanie, które nie ma rozwiązań:

A.  $5x^2 + 19 = 0$ ;

B.  $5x^2 + 19x = 0$ ;

C.  $5x^2 - 19 = 0$ ;

D.  $5x^2 - 19x = 0$ .

**4.2.3.** Wybierz równanie, które ma dokładnie jedno rozwiązanie:

A.  $x^2 - 6x + 12 = 0$ ;

B.  $x^2 - 6x + 9 = 0$ ;

C.  $x^2 - 6x - 9 = 0$ ;

D.  $x^2 - 6x - 12 = 0$ .

**4.2.4.** Rozwiąż równanie:  $-3(3 + x)^2 = (x - 3)(x + 3)$ .