7. TRYGONOMETRIA

7.1. Funkcje trygonometryczne i zależności między nimi

7.1.1. Dany jest trójkąt prostokątny. Jeden z jego kątów ma miarę α. Wyznacz miarę drugiego kąta, jeśli:
a) $\alpha = 32°$; b) $\alpha = 19°$; c) $\alpha = 76°$; d) $\alpha = 43°31'$; e) $\alpha = 62°29'$.

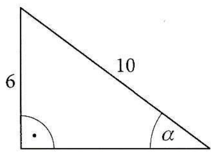
7.1.2. W trójkącie prostokątnym a, b to długości przyprostokątnych, a c – długość przeciwprostokątnej. Wyznacz długość trzeciego boku, jeśli:
a) $a = 7$, $b = 24$; b) $a = 5$, $c = 13$; c) $b = 60$, $c = 61$; d) $a = 12$, $c = 37$.

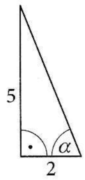
7.1.3. Zbuduj kąt ostry α, jeśli:

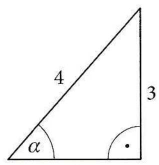
a) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$; b) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$; c) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;

d) $\sin\alpha = 0{,}3$; e) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{3}$; f) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

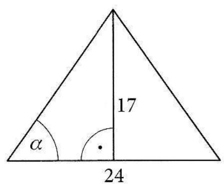
7.1.4. Oblicz $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\mathrm{tg}\,\alpha$.

a)


b)


c)


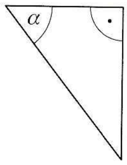
7.1.5. Oblicz $\sin\alpha$, jeśli narysowany trójkąt jest równoramienny.



7.1.6. Oblicz $\mathrm{tg}\,\alpha$, jeśli:

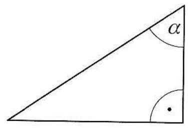
a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha = 0{,}5$; b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ i $\cos\alpha = 0{,}25$;

c) $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\cos\alpha = 0{,}8$.



7.1.7. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej, gdy:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$; b) $\operatorname{tg} \alpha = 12{,}5$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}5$; d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.



7.1.8. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej, jeśli:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3{,}23$; b) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}32$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 7$; d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

7.1.9. Oblicz wartości wyrażeń.

a) $\sin 60° + 2\operatorname{tg} 30°$

b) $4\cos 60° - 0{,}5\operatorname{tg} 45°$

c) $\dfrac{\sin^2 120° - 3\operatorname{tg}^2 60°}{2 - \operatorname{tg} 45°}$

d) $4\sin 30° \cdot \cos^2 45° + 3$

7.1.10. Odczytaj wartości funkcji tangens dla kątów:

a) 28°; b) 43°; c) 72°; d) 6°; e) 35°.

7.1.11. Czy istnieje taki kąt α, dla którego:

a) $7\sin \alpha = 6$; b) $6\sin \alpha = 7$; c) $7\cos \alpha = 8$; d) $-6\cos \alpha = 3$?

7.1.12. Oblicz wartości wyrażeń, nie korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych:

a) $\sin^2 142° + \cos^2 142°$; b) $\sin^2 5° + \cos^2 5°$; c) $\sin^2 32° + \cos^2 32°$;

d) $\sin^2 31° + \sin^2 59°$; e) $\cos^2 16° + \cos^2 74°$. e) $\sin 135° - \cos 135°$.

7.1.13. Wyznacz sinus większego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych: $a = 80$, $b = 39$.

7.1.14. Dany jest punkt $P = (4, 8)$. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta o wierzchołku w początku układu współrzędnych, jaki tworzy promień wodzący tego punktu z dodatnią półosią osi OX.

7.1.15. W trójkącie prostokątnym o bokach o długościach, 12, 35, 37 tangens większego kąta ostrego jest równy:

A. $\frac{35}{12}$; B. $\frac{35}{37}$; C. $\frac{12}{35}$; D. $\frac{37}{35}$.

7.1.16. Wybierz zdanie prawdziwe, wiedząc, że $\sin 42°30' \approx 0{,}6756$ i $\cos 47°30' \approx 0{,}6756$.

A. $\sin 42°30' + \cos 47°30' = 1$;

B. $\sin 42°30' - \cos 47°30' > 0$;

C. $\sin^2 42°30' + \sin^2 47°30' = 1$;

D. $\sin 42°30' = \sin 47°30'$.

7.1.17. Jeżeli $\sin \alpha =$

A. $(\sin \alpha)(\cos \alpha) < 0{,}5$

C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{7}$;

7.1.18. Oblicz miarę k

7.1.19. Oblicz miarę k

7.1.20. Oblicz miarę k

7.1.21. Oblicz miarę k

7.1.22. Która z poniżs

A. $\sin 60° > \cos 60°$

C. $\operatorname{tg} 25° > \cos 65°$

7.1.23. Przyprostokąt

miarą mniejszego kąta

A. $\alpha \approx 10°$; B.

7.1.24. Wartość wyraż

A. $\frac{-2 + 3\sqrt{3}}{3}$ B.

7.1.25. Jeśli kąt α jest

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i tg

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{5}$ i tg

7.1.26. Wiesz, że sin

A. 39°; B.

7.1.17. Jeżeli $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, to:

A. $(\sin\alpha)(\cos\alpha) < 0{,}5$; B. $\alpha > 50°$;

C. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{7}$; D. $\cos\alpha > \sin\alpha$.

7.1.18. Oblicz miarę kąta ostrego α, jeśli $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.1.19. Oblicz miarę kąta α, jeśli $3 - \cos\frac{3}{5}\alpha = 2{,}5$.

7.1.20. Oblicz miarę kąta ostrego α, jeśli $\sqrt{3}\operatorname{tg}(2\alpha - 60°) + 11 = 12$.

7.1.21. Oblicz miarę kąta ostrego α, jeśli $3(1 + 4\cos\alpha) = 9$.

7.1.22. Która z poniższych nierówności jest prawdziwa?

A. $\sin 60° > \cos 60°$ B. $\sin 60° < \operatorname{tg} 60°$

C. $\operatorname{tg} 25° > \cos 65°$ D. $\cos 45° < \cos 60°$

7.1.23. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 11 i 60. Jeśli α jest miarą mniejszego kąta ostrego, to:

A. $\alpha \approx 10°$; B. $\alpha \approx 44°$; C. $\alpha \approx 79°$; D. $\alpha \approx 11°$.

7.1.24. Wartość wyrażenia $\frac{3\left(\cos^2 65° + \sin^2 65°\right) - 2\operatorname{tg}30°}{2\sin 60°}$ jest równa:

A. $\frac{-2 + 3\sqrt{3}}{3}$ B. $3 - 2\sqrt{3}$; C. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; D. $\frac{9 - 2\sqrt{3}}{3}$.

7.1.25. Jeśli kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, to:

A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{6}$; B. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$;

C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$; D. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

7.1.26. Wiesz, że $\sin\alpha = \cos 39°$ i α jest kątem ostrym. Jaką miarę ma α?

A. 39°; B. 51°; C. 141°; D. 21°.

7.1.27. Trzecia część liczby tg 60° jest równa:
A. cos 30°; B. tg 20°; C. tg 30°; D. tg 45°.

7.1.28. Dla $\alpha = 30°$ wartość wyrażenia $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha$ jest:
A. mniejsza od zera; B. równa zero; C. równa 1; D. większa od 1.

7.1.29. Przekształć na prostsze wyrażenia:

$$a = \frac{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha \quad \text{i} \quad b = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{2\cos\alpha}.$$

7.1.30. Uprość wyrażenie $a = \dfrac{1}{\sin^2(90° - \alpha)} - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$.

7.1.31. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α, dla którego $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ i $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

7.1.32. Oblicz bez użycia tablic wartość wyrażenia $w = (\operatorname{tg}^2 21° + 1) \cdot \sin^2 69°$.

7.1.33. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$, gdy $\sin\alpha = \dfrac{3}{7}$.

7.1.34. Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest równość:
$\cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$.

7.1.35. Uzasadnij, że $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

7.1.36. Czy istnieje kąt α, dla którego $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{13} - 2\sqrt{3}$ i $\operatorname{tg}(90 - \alpha) = \sqrt{13} + 2\sqrt{3}$?

7.1.37. Znajdź wartości $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$ i kąt α jest kątem ostrym.

7.1.38. Oblicz wartość wyrażenia $3\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ i kąt α jest kątem ostrym.

7.1.39. Jeżeli α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$, to:

A. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{9}{40}$; B. $\cos\alpha = \dfrac{1}{41}$; C. $(\sin\alpha)(\cos\alpha) = 1$; D. $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{49}{41}$.

7.1.40. Oblicz cos α, j

7.1.41. Sinus kąta ost

7.1.42. Oblicz $125^{\sin\alpha}$,

7.1.43. Wykaż, że dla
przyjmuje wartość 1.

7.1.1. Jeżeli trójkąt jest
pozostałych jego kątów
musisz obliczyć 90° –
a) $\alpha = 58°$; b) α =

7.1.2. Skorzystaj z twier
a) $c = 25$; b)

7.1.3. Możesz skonstru
konstruować kąty w u
datnią półoś osi OX, a

konstruowaniu kąta, g

prostą $y = b$ i okrąg o

powinieneś narysować

i promieniu c. Gdy dan

Drugie ramię kąta wy
W tym zadaniu masz sk
cięcia znajdujące się w

7.1.40. Oblicz $\cos\alpha$, jeżeli $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{35}{37}$ i kąt α jest kątem ostrym.

7.1.41. Sinus kąta ostrego α jest o 32% większy od cosinusa tego kąta. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.

7.1.42. Oblicz $125^{\sin\alpha}$, jeżeli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ i kąt α jest kątem ostrym.

7.1.43. Wykaż, że dla dowolnego kąta α wyrażenie $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha$ przyjmuje wartość 1.

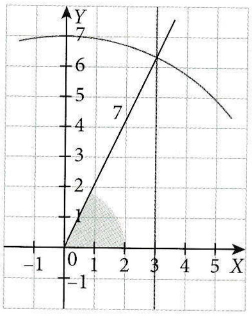
Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

7.1.1. Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to jeden z jego kątów ma miarę 90°. Suma miar pozostałych jego kątów też jest równa 90°. Zatem obliczając miarę trzeciego z kątów, musisz obliczyć $90^\circ - \alpha$.
a) $\alpha = 58^\circ$; b) $\alpha = 71^\circ$; c) $\alpha = 14^\circ$; d) $\alpha = 46^\circ 29'$; e) $\alpha = 27^\circ 31'$.

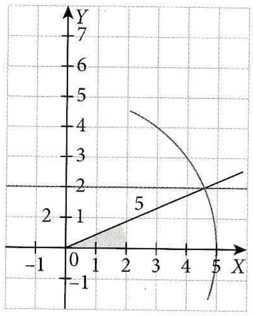
7.1.2. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa:
a) $c = 25$; b) $b = 12$; c) $a = 11$; d) $b = 35$.

7.1.3. Możesz skonstruować trójkąt prostokątny o zadanych bokach. Wygodnie jest konstruować kąty w układzie współrzędnych, przyjmując jako pierwsze ramię dodatnią półoś osi OX, a jako wierzchołek – początek układu współrzędnych. Przy konstruowaniu kąta, gdy dany jest jego sinus $\left(\sin\alpha = \frac{b}{c}\right)$, powinieneś narysować prostą $y = b$ i okrąg o promieniu c. Podobnie, gdy dany jest cosinus $\left(\cos\alpha = \frac{a}{c}\right)$, powinieneś narysować prostą $x = a$ i okrąg o środku w środku układu współrzędnych i promieniu c. Gdy dany jest tangens $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}\right)$, rysujesz prostą $y = b$ i prostą $x = a$. Drugie ramię kąta wyznacza punkt przecięcia tych prostych lub prostej i okręgu. W tym zadaniu masz skonstruować kąt ostry, więc interesują Cię tylko punkty przecięcia znajdujące się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

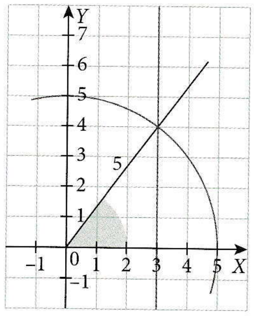
a) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$



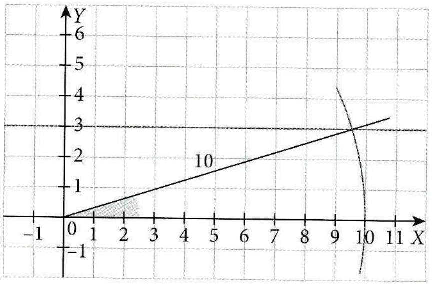
b) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$



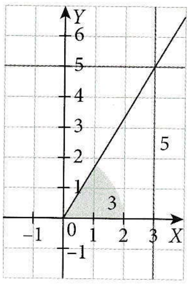
c) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$



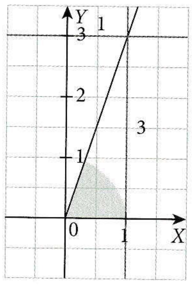
d) $\sin\alpha = 0{,}3$



e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$



f) $\operatorname{tg}\alpha = 3$



7.1.4. Przyda Ci się długość trzeciego boku trójkąta. Wyznacz ją, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

a) $a^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow a = 8$ oraz $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;

b) $5^2 + 2^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{29}$ oraz $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$;

c) $a^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow a = \sqrt{7}$ oraz $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

7.1.5. Trójkąt jest równoramienny, więc sinus możesz obliczyć z definicji funkcji sinus w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 17 i 12. Z twierdzenia Pitagorasa możesz wyznaczyć długość przeciwprostokątnej tego trójkąta: $c = \sqrt{433}$.

Wtedy $\sin\alpha = \frac{17}{\sqrt{433}} = \frac{17\sqrt{433}}{433}$.

7.1.6. Podstaw do wzo

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ i $\cos\alpha$

c) $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\cos\alpha =$

7.1.7. Jeśli długość dru

ceniu otrzymasz: $a =$

a) $a = \frac{25}{3}$; b)

7.1.8. Jeżeli długość dr

leżności $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{16}$ otrz

Wtedy: a) $b = 51{,}68$;

7.1.9. a) $\sin 60° + 2\operatorname{tg} 3$

c) Skorzystaj ze wzoru

$$\frac{\sin^2 60° - 3\operatorname{tg}^2 60°}{2 - \operatorname{tg} 45°} =$$

d) $4\sin 30° \cdot \cos^2 45° +$

7.1.10.

a) $\operatorname{tg} 28° = 0{,}5317$;

d) $\operatorname{tg} 6° = 0{,}1051$;

7.1.11. Wylicz w każdym

i cosinus nie mogą osią

a) $\sin\alpha = \frac{6}{7}$; b)

W przypadku b) i c) tak

7.1.6. Podstaw do wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i przekształć do najprostszej postaci:

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$;

b) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ i $\cos\alpha = 0{,}25 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$;

c) $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$.

7.1.7. Jeśli długość drugiej przyprostokątnej oznaczysz a, to $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{25}{a}$. Po przekształceniu otrzymasz: $a = \dfrac{25}{\operatorname{tg}\alpha}$.

a) $a = \dfrac{25}{3}$; b) $a = 2$; c) $a = 10$; d) $a = 12{,}5\sqrt{2}$.

7.1.8. Jeżeli długość drugiej przyprostokątnej oznaczysz b, to po przekształceniu zależności $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{16}$ otrzymasz: $b = 16 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Wtedy: a) $b = 51{,}68$; b) $b = 5{,}12$; c) $b = 112$; d) $b = 16\sqrt{3}$.

7.1.9. a) $\sin 60^\circ + 2\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$; b) $4\cos 60^\circ - 0{,}5\operatorname{tg} 45^\circ = 1{,}5$.

c) Skorzystaj ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$:

$$\frac{\sin^2 60^\circ - 3\operatorname{tg}^2 60^\circ}{2 - \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\left(\sqrt{3}\right)^2}{2-1} = \frac{-33}{4};$$

d) $4\sin 30^\circ \cdot \cos^2 45^\circ + 3 = 4$.

7.1.10.

a) $\operatorname{tg} 28^\circ = 0{,}5317$; b) $\operatorname{tg} 43^\circ = 0{,}9325$; c) $\operatorname{tg} 72^\circ = 3{,}0777$;
d) $\operatorname{tg} 6^\circ = 0{,}1051$; e) $\operatorname{tg} 35^\circ = 0{,}7002$.

7.1.11. Wylicz w każdym przypadku wartość danej funkcji trygonometrycznej. Sinus i cosinus nie mogą osiągać wartości mniejszych od -1 i większych od 1.

a) $\sin\alpha = \dfrac{6}{7}$; b) $\sin\alpha = \dfrac{7}{6} > 1$; c) $\cos\alpha = \dfrac{8}{7} > 1$; d) $\cos\alpha = -0{,}5$.

W przypadku b) i c) taki kąt nie istnieje.

7.1.12. Skorzystaj z tzw. „wzoru jedynkowego”: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ oraz, jeśli to będzie konieczne, z zależności $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ lub $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

a) $\sin^2 142° + \cos^2 142° = 1$; b) $\sin^2 5° + \cos^2 5° = 1$; c) $\sin^2 32° + \cos^2 32° = 1$;

d) $\sin^2 31° + \sin^2 59° = \cos^2 59° + \sin^2 59° = 1$;

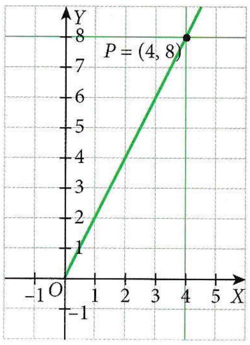
e) $\cos^2 16° + \cos^2 74° = \sin^2 74° + \cos^2 74° = 1$;

f) $\sin 135° - \cos 135° = \sin 45° + \cos 45° = \sqrt{2}$ (w tym przypadku należało najpierw wykorzystać wzory $\sin(180° - 45°) = \sin 45°$ i $\cos(180° - 45°) = -\cos 45°$).

7.1.13. Większy kąt leży naprzeciwko dłuższego boku. W tym przypadku dłuższym bokiem jest a. Oznacz przez α miarę kąta leżącego naprzeciw boku o długości a i przez c – długość przeciwprostokątnej trójkąta. Z definicji $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Oblicz c, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa: $c = 89$.

Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{80}{89}$.

7.1.14. Oblicz długość $r = |OP|$.



Skorzystaj w tym celu z twierdzenia Pitagorasa. $r = 4\sqrt{5}$.
Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymasz szukane wartości.

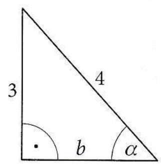
Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\operatorname{tg}\alpha = 2$.

7.1.15. Większy kąt znajduje się naprzeciwko dłuższego boku.
Odpowiedź: A.

7.1.16. Zauważ, że $42°30' + 47°30' = 90°$. Zatem $\sin 42°30' = \cos 47°30'$. Możesz to stwierdzić na podstawie treści zadania. Gdy wykonasz podstawienie w punkcie C, to otrzymasz wzór „jedynkowy”. A więc właśnie ta odpowiedź jest prawdziwa.

7.1.17. Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$. Narysuj trójkąt prostokątny.



Z twierdzenia Pitagorasa oblicz b: $b^2 + 9 = 16$.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}6614$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Od razu możesz stwierdzić, że nieprawdziwe są odpowiedzi C i D.
Sprawdź w tablicach, dla jakiego kąta wartość sinusa jest zbliżona do danej: $48° < \alpha < 49°$.
Prawdziwa jest odpowiedź: A.

7.1.18. Kąt, dla którego

Odpowiedź: $\alpha = 15°$.

7.1.19.

$-\cos\frac{3}{5}\alpha = -0{,}5$

$\cos\frac{3}{5}\alpha = 0{,}5$

$\frac{3}{5}\alpha = 60°$

Odpowiedź: $\alpha = 100°$.

7.1.20.

$\sqrt{3}\operatorname{tg}(2\alpha - 60°) = 1$

$\operatorname{tg}(2\alpha - 60°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2\alpha - 60° = 30°$

Odpowiedź: $\alpha = 45°$.

7.1.21. $12\cos\alpha = 6$, wię

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

7.1.22. Porównaj miary

Odpowiedź: D.

7.1.23. Skorzystaj z wart

Odpowiedź: A.

7.1.24. Po zastosowaniu

Podstaw wartości tg 30

Odpowiedź: A.

7.1.25. Narysuj trójkąt p

gości boków pozwalają

Zastosuj twierdzenie Pi

boku $b = 2\sqrt{6}$. Teraz ob

Odpowiedź: D.

7.1.18. Kąt, dla którego cosinus jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$, to 45°. Zatem $3\alpha = 45°$.
Odpowiedź: $\alpha = 15°$.

7.1.19.

$-\cos\frac{3}{5}\alpha = -0{,}5$	Przekształć równość do postaci, w której po jednej stronie będzie cosinus, a po drugiej stronie wartość, jaką ma przyjąć.
$\cos\frac{3}{5}\alpha = 0{,}5$	
$\frac{3}{5}\alpha = 60°$	Odczytaj miarę kąta, dla którego cosinus przyjmuje wartość 0,5.
Odpowiedź: $\alpha = 100°$.	

7.1.20.

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(2\alpha - 60°) = 1$	Przekształć równość do postaci, w której po jednej stronie będzie tangens, a po drugiej stronie wartość, jaką ma przyjąć.
$\mathrm{tg}(2\alpha - 60°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	Odczytaj miarę kąta, dla którego tangens przyjmuje wartość $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
$2\alpha - 60° = 30°$	
Odpowiedź: $\alpha = 45°$.	

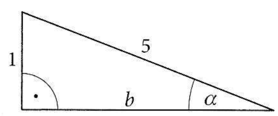
7.1.21. $12\cos\alpha = 6$, więc $\cos\alpha = 0{,}5$.
Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

7.1.22. Porównaj miary odpowiednich kątów w tablicach.
Odpowiedź: D.

7.1.23. Skorzystaj z wartości funkcji tangens.
Odpowiedź: A.

7.1.24. Po zastosowaniu wzoru „jedynkowego" w mianowniku pozostanie 3 – 2tg 30°. Podstaw wartości tg 30° i sin 60° i przekształć otrzymane wyrażenie.
Odpowiedź: A.

7.1.25. Narysuj trójkąt prostokątny, w którym zaznacz długości boków pozwalające zdefiniować sinus.



Zastosuj twierdzenie Pitagorasa i oblicz długość trzeciego boku $b = 2\sqrt{6}$. Teraz oblicz cosinus i tangens danego kąta.
Odpowiedź: D.

7.1.26. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Jeśli chcesz znaleźć α, to wykonaj działanie $90° - 39° = 51°$.
Odpowiedź: B.

7.1.27. $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Trzecia część tej liczby to $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Tangens jakiego kąta przyjmuje taką wartość?
Odpowiedź: C.

7.1.28. Jeżeli zastosujesz wzór skróconego mnożenia i podniesiesz wyrażenie w nawiasie do kwadratu, to otrzymasz:
$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha$.
Kiedy spojrzysz na wzór na $\sin 2\alpha$, zobaczysz, że wyrażenie jest równe zero. Nie musisz stosować tego wzoru. Wystarczy podstawić wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° i 60°, a dojdziesz do tego samego wniosku.
Odpowiedź: B.

7.1.29. Aby przedstawić a w najprostszy sposób, wykonaj mnożenie, stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i wyraź $\operatorname{tg}\alpha$ za pomocą sinusa i cosinusa: $a = \frac{(1-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha$. Zauważ, że przekształcając wzór $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, otrzymasz $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Wykorzystaj to w liczniku:
$a = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha$. Po uproszczeniu otrzymasz $a = 0$.
Zastosuj do przekształcenia wyrażenia opisującego b wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy: $b = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1}{2\cos\alpha}$. Po zastosowaniu wzoru „jedynkowego" ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$) otrzymasz: $b = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}$, czyli $b = \sin\alpha$.
Odpowiedź: $a = 0$, $b = \sin\alpha$.

7.1.30. Skorzystaj ze wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, a zamiast $\sin(90° - \alpha)$ podstaw $\cos\alpha$.
Otrzymasz: $a = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$. Odejmij ułamki, a w mianowniku zastosuj wzór „jedynkowy": $a = \frac{1-\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}$. Teraz wystarczy rozłożyć mianownik, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a = \frac{1-\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$.
Odpowiedź: $a = \frac{1}{1+\sin\alpha}$, o ile $\sin\alpha \neq -1$ i $\sin\alpha \neq 1$.

7.1.31. Zauważ, że obie
przedziale. Podstaw wa
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$
Odpowiedź: Równość

7.1.32. Skorzystaj z nast
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. Ot
Wykonaj mnożenie: w
Odpowiedź: $w = 1$.

7.1.33. Skorzystaj ze wz
funkcji sinus: $\frac{1-\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}$
łożyć mianownik na cz
ułamek i dopiero poten
Odpowiedź: Wartość w

7.1.34. Zapisz lewą stro
prawej strony:
$L = \cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$
$L = \cos\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$
$L = \cos\alpha = P$

7.1.35. Skorzystaj ze wzo
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{\sin(90° - \alpha}{\cos(90° - \alpha}$
Otrzymasz: $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, a to j

7.1.36. Możesz skorzysta
to prawdą jest, że $\operatorname{tg}\alpha \cdot$ t
żenie, stosując wzór skr
Odpowiedź: Istnieje.

7.1.31. Zauważ, że obie wartości są mniejsze od 1, a więc mieszczą się w odpowiednim przedziale. Podstaw wartości funkcji trygonometrycznych do wzoru „jedynkowego”:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

Odpowiedź: Równość jest prawdziwa, więc taki kąt α istnieje.

7.1.32. Skorzystaj z następujących zależności: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. Otrzymasz: $w = \left(\dfrac{\sin^2 21°}{\cos^2 21°} + 1\right) \cdot \sin^2 69° = \left(\dfrac{\cos^2 69°}{\sin^2 69°} + 1\right) \cdot \sin^2 69°$.

Wykonaj mnożenie: $w = \cos^2 69° + \sin^2 69° = 1$.
Odpowiedź: $w = 1$.

7.1.33. Skorzystaj ze wzoru „jedynkowego”, aby przedstawić mianownik za pomocą funkcji sinus: $\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$. Możesz teraz podstawić wartość sinusa albo możesz rozłożyć mianownik na czynniki, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, uprościć ułamek i dopiero potem podstawić: $\dfrac{1}{1 + \sin\alpha} = \dfrac{1}{1 + \frac{3}{7}}$.

Odpowiedź: Wartość wyrażenia jest równa 0,7.

7.1.34. Zapisz lewą stronę równości i przekształcaj ją dopóty, dopóki nie uzyskasz prawej strony:

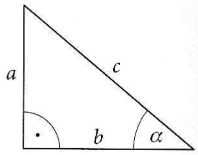
$L = \cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$	wyłącz wspólny czynnik przed nawias
$L = \cos\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$	zastosuj wzór „jedynkowy”
$L = \cos\alpha = P$	

7.1.35. Skorzystaj ze wzoru wyrażającego tangens w zależności od sinusa i cosinusa. $\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \dfrac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)}$. Zastosuj wzory: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ i $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

Otrzymasz: $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, a to jest równe $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, o ile $\sin\alpha \neq 0$.

7.1.36. Możesz skorzystać z wyniku poprzedniego zadania. Skoro $\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, to prawdą jest, że $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}(90 - \alpha) = 1$. Czy tak jest w tym przypadku? Wykonaj mnożenie, stosując wzór skróconego mnożenia.
Odpowiedź: Istnieje.

7.1.37.



I sposób: Skorzystaj ze wzoru („jedynkowego") $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Otrzymasz równość: $\sin^2\alpha + \frac{39}{64} = 1$, więc $\sin^2\alpha = \frac{25}{64}$, czyli

$\sin\alpha = \frac{5}{8}$. Aby obliczyć $\mathrm{tg}\,\alpha$, skorzystaj ze wzoru:

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5\sqrt{39}}{39}$.

II sposób: Z definicji funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym wiesz, że $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Przyjmij, że $b = \sqrt{39}$j, $c = 8$j, gdzie j oznacza długość pewnej jednostki. Oblicz a z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 64 - 39$; $a^2 = 25$; $a = 5$j.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, więc $\sin\alpha = \frac{5}{8}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5\sqrt{39}}{39}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{5}{8}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5\sqrt{39}}{39}$.

7.1.38. Ze wzoru „jedynkowego" oblicz $\sin^2\alpha$ i $\sin\alpha$. Zastosuj $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i oblicz $\mathrm{tg}\,\alpha$.

Oblicz wartość wyrażenia $3\sin\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha$, dla $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\mathrm{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$.

Odpowiedź: 0.

7.1.39. Oblicz $\cos\alpha = \frac{9}{41}$. Zauważysz, że odpowiedzi B, C są fałszywe. Sprawdź odpowiedź D. Sprawdzenie tych trzech przypadków pozwoli Ci wybrać właściwą odpowiedź, ale możesz obliczyć $\mathrm{tg}\,\alpha$ i sprawdzić odpowiedź A.
Odpowiedź: D.

7.1.40. Skorzystaj ze wzoru $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Oblicz $\cos\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{35}{37}$.

Odpowiedź: $\cos\alpha = \frac{12}{37}$.

7.1.41. Zapisz $\sin\alpha = 1{,}32\cos\alpha$. Skorzystaj ze wzoru $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Odpowiedź: 1,32.

7.1.42. Przedstaw 125, j
Obliczoną wartość wsta
Odpowiedź: 25.

7.1.43.

$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + c$
$\sin^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

7.2. Zastosow m.in. w plani

7.2.1. W trójkącie pros
długość $4\sqrt{3}$, a przeciw
metrycznych dla kątów

7.2.2. Oblicz wysokość
a) $\sin\alpha = 0{,}63$; b)
c) $\sin\alpha = 0{,}01$; d)

7.2.3. Oblicz długość 2
a) $\cos\alpha = 0{,}45$;
b) $\cos\alpha = 0{,}975$;
c) $\cos\alpha = 0{,}707$.

7.2.4. Oblicz pole trój
jest prosty, mając dane
równy 0,85.

7.2.5. W trójkącie AB
Oblicz obwód trójkąta.

7.1.42. Przedstaw 125, jako potęgę liczby 5: $125^{\sin\alpha} = (5^3)^{\sin\alpha} = 5^{3\sin\alpha}$. Oblicz $\sin\alpha$. Obliczoną wartość wstaw do wykładnika potęgi.
Odpowiedź: 25.

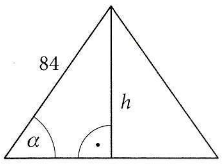
7.1.43.

$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha$	Wyłącz wspólny czynnik $\sin^2\alpha$ przed nawias.
$\sin^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha$	Zastosuj „wzór jedynkowy" (trzeba to zrobić 2 razy).
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$	

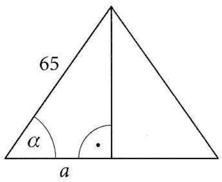
7.2. Zastosowania funkcji trygonometrycznych, m.in. w planimetrii

7.2.1. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta ostrego ma długość $4\sqrt{3}$, a przeciwprostokątna ma długość 8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych tego trójkąta.

7.2.2. Oblicz wysokość trójkąta, gdy:
a) $\sin\alpha = 0{,}63$; b) $\sin\alpha = 0{,}135$;
c) $\sin\alpha = 0{,}01$; d) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$.



7.2.3. Oblicz długość $2a$ podstawy trójkąta, jeśli:
a) $\cos\alpha = 0{,}45$;
b) $\cos\alpha = 0{,}975$;
c) $\cos\alpha = 0{,}707$.



7.2.4. Oblicz pole trójkąta prostokątnego ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty, mając dane: $|AB| = 90$ cm i sinus kąta ostrego przy wierzchołku B jest równy 0,85.

7.2.5. W trójkącie ABC dane są: $\gamma = 90°$, $\alpha = 41°$ i $b = 18{,}4$. Oblicz obwód trójkąta.