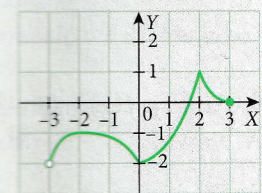


czyła 7000 osobników.

D. $7000 \cdot 0,02^t$.

a, gdy $2 < m < 4$.



osiągając zysk 10%. Ile zysk 15%, a drugi 3%?

no ich średnio 12 miesięcznych rowerów wzrosła

w postaci $c(x) = ax + b$.

ędzie cena?

mieści się o trzy książki i na każdej półce, jeśli

6. CIĄGI

6.1. Ciągi liczbowe

6.1.1. Oblicz a_1, a_2, a_4, a_5 , jeśli:

- | | | |
|---------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $a_n = 3n - 7$; | b) $a_n = 0,4n - 4$; | c) $a_n = n^2 - 2n + 5$; |
| d) $a_n = 2n^2 - n + 1$; | e) $a_n = -3n^2 + n + 6$; | f) $a_n = \frac{3n-2}{n+3}$; |
| g) $a_n = 3n^3 + 2n^2$; | h) $a_n = 2^{n+1} + 2$; | i) $a_n = \frac{n^2-1}{n+2}$; |
| j) $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$; | k) $a_n = (-1)^n \cdot (3n + 2)$. | |

6.1.2. Oblicz sumę trzech pierwszych wyrazów ciągu o wyrazie ogólnym a_n , jeśli:

- | | | |
|---------------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $a_n = (-1)^n \cdot (n + 4)$; | b) $a_n = (n - 1)(n + 3)$; | c) $a_n = (n + 4)^2 - 12$; |
| d) $a_n = n^2 - 2n + 3$; | e) $a_n = \frac{4}{3n}$; | f) $a_n = \frac{3n}{n-2}$; |
| g) $a_n = \frac{4n^2 + 1}{n + 1}$; | h) $a_n = \frac{-2}{n + 1}$; | i) $a_n = 3^{n-1}$; |
| j) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n^2}{n^2}$; | k) $a_n = 2^{n+1}$. | |

6.1.3. Oblicz a_3 oraz a_8 , wiedząc, że:

- | | | |
|----------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n + 4}$; | b) $a_n = \frac{n^3 - 1}{2n^2 - 2}$; | c) $a_n = \sqrt{(3n^2 + 1)}$. |
|----------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|

6.1.4. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy zero?

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a) $a_n = n_2 - 11n - 12$ | b) $a_n = \frac{7}{13}n - 84$ |
|---------------------------|-------------------------------|

6.1.5. Oblicz: $a_{n-1}, a_{2n-1}, a_{n+1}$ ciągu, w którym $a_n = 3n^2 - n + 4$.

6.1.6. Które wyrazy ciągu (a_n) , gdzie $a_n = \frac{3n-14}{7}$, są mniejsze od 13?

6.1.7. Dziewiąty wyraz ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$ jest równy:

- A. $\frac{25}{82}$; B. $\frac{16}{81}$; C. $\frac{25}{19}$; D. $\frac{25}{81}$.

6.1.8. Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu (a_n) , w którym $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$, jest równa:

- A. 1; B. 0; C. 2; D. 4.

6.1.9. Liczba 8 jest piątym wyrazem ciągu:

- A. $a_n = (n-1)^2 + 5$; B. $a_n = \frac{n^2-7}{n+1}$;
 C. $a_n = (4-n)^3 + 7$; D. $a_n = 3n^3 - 367$.

6.1.10. Które wyrazy ciągu (a_n) , gdzie $a_n = \frac{n^2-6n-13}{3}$, są mniejsze od 1?

6.1.11. Który wyraz ciągu $a_n = 2n^2 - 24n + 40$ przyjmuje najmniejszą wartość?

6.1.12. Oblicz S_1 i S_3 , gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu wyrażającą się wzorem:

- a) $S_n = 2n^2 + 3n$; b) $S_n = -n^2 + 2n$;
 c) $S_n = 4n^2 - 2n$; d) $S_n = 0,04n^2 + 3,2n$.

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

6.1.1. Podstaw kolejno 1, 2, 4, 5 za n do podanych wzorów:

- a) $a_1 = 3 \cdot 1 - 7 = -4, a_2 = 3 \cdot 2 - 7 = -1, a_4 = 3 \cdot 4 - 7 = 5, a_5 = 3 \cdot 5 - 7 = 8$;
 b) $a_1 = 0,4 \cdot 1 - 4 = -3,6, a_2 = 0,4 \cdot 2 - 4 = -3,2, a_4 = 0,4 \cdot 4 - 4 = -2,4,$
 $a_5 = 0,4 \cdot 5 - 4 = -2$;
 c) $a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4, a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 5, a_4 = 4^2 - 2 \cdot 4 + 5 = 13,$
 $a_5 = 5^2 - 2 \cdot 5 + 5 = 20$;
 d) $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 2, a_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7, a_4 = 2 \cdot 4^2 - 4 + 1 = 29,$
 $a_5 = 2 \cdot 5^2 - 5 + 1 = 46$;
 e) $a_1 = -3 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 4, a_2 = -3 \cdot 2^2 + 2 + 6 = -4, a_4 = -3 \cdot 4^2 + 4 + 6 = -38,$
 $a_5 = -3 \cdot 5^2 + 5 + 6 = -64$;

f) $a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1 + 3} = \frac{1}{4}$

g) $a_1 = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 5$

h) $a_1 = 2^2 + 2 = 6, a_2 = 2^2 + 2 = 6$

i) $a_1 = \frac{1^2 - 1}{3} = 0, a_2 = \frac{2^2 - 1}{3} = 1$

j) $a_1 = \left(1 + \frac{3}{1}\right)^1 = 4$

k) $a_1 = (-1)^1 \cdot (3 \cdot 1) = -3$

6.1.2. Wyznacz trzy wyrazy ciągu

a) $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)$

b) $a_n = (n-1)(n+1)$

c) $a_n = (n+4)^2 - 12$

d) $a_n = n^2 - 2n + 3$

e) $a_n = \frac{4}{3n}, a_1 + a_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{6} = 2$

f) $a_n = \frac{3n}{n-2}$, drugi wyraz jest 6

g) $a_n = \frac{4n^2 + 1}{n+1}, a_1 + a_2 = \frac{4 \cdot 1^2 + 1}{1+1} + \frac{4 \cdot 2^2 + 1}{2+1} = \frac{5}{2} + \frac{17}{3} = \frac{15}{6} + \frac{34}{6} = \frac{49}{6}$

h) $a_n = \frac{-2}{n+1}, a_1 + a_2 = \frac{-2}{1+1} + \frac{-2}{2+1} = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$

i) $a_n = 3^{n-1}, a_1 + a_2 = 3^0 + 3^1 = 1 + 3 = 4$

j) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$

k) $a_n = 2^{n+1}, a_1 + a_2 = 2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$

6.1.3.

a) Podstaw 3 w miast n .

Odpowiedź: $a_3 = 12$

b) Odpowiedź: $a_3 = 27$

c) Odpowiedź: $a_3 = 27$

est równy:

D. $\frac{25}{81}$.

$a_n = 1 + (-1)^{n+1}$, jest

D. 4.

niejsze od 1?

niejszą wartość?

wyrazów ciągu wyra-

$-5 - 7 = 8;$

$-2,4,$

$= 13,$

$= 29,$

$4 + 6 = -38,$

f) $a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1 + 3} = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 + 3} = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{3 \cdot 4 - 2}{4 + 3} = \frac{10}{7}, a_5 = \frac{3 \cdot 5 - 2}{5 + 3} = \frac{13}{8};$

g) $a_1 = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 5, a_2 = 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 = 32, a_4 = 224, a_5 = 425;$

h) $a_1 = 2^2 + 2 = 6, a_2 = 2^3 + 2 = 10, a_4 = 34, a_5 = 66;$

i) $a_1 = \frac{1^2 - 1}{3} = 0, a_2 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}, a_5 = \frac{24}{7};$

j) $a_1 = \left(1 + \frac{3}{1}\right)^1 = 4, a_2 = \left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 = 6,25, a_4 = \frac{2401}{256}, a_5 = \left(\frac{8}{5}\right)^5;$

k) $a_1 = (-1)^1 \cdot (3 \cdot 1 + 2) = -5, a_2 = 8, a_4 = 14, a_5 = -17.$

6.1.2. Wyznacz trzy pierwsze wyrazy każdego z ciągów i oblicz ich sumę:

a) $a_n = (-1)^n \cdot (n + 4), a_1 + a_2 + a_3 = -5 + 6 - 7 = -6;$

b) $a_n = (n - 1)(n + 3), a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 5 + 12 = 17;$

c) $a_n = (n + 4)^2 - 12, a_1 + a_2 + a_3 = 13 + 24 + 37 = 74;$

d) $a_n = n^2 - 2n + 3, a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 3 + 6 = 11;$

e) $a_n = \frac{4}{3n}, a_1 + a_2 + a_3 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{22}{9};$

f) $a_n = \frac{3n}{n-2}$, drugi wyraz ciągu nie istnieje;

g) $a_n = \frac{4n^2 + 1}{n + 1}, a_1 + a_2 + a_3 = \frac{5}{2} + \frac{17}{3} + \frac{37}{4} = \frac{209}{12};$

h) $a_n = \frac{-2}{n+1}, a_1 + a_2 + a_3 = -1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{13}{6};$

i) $a_n = 3^{n-1}, a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 9 = 13;$

j) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2 - n^2}{n^2}, a_1 + a_2 + a_3 = -1 - 0,5 + \frac{7}{9} = \frac{-13}{18};$

k) $a_n = 2^{n+1}, a_1 + a_2 + a_3 = 4 + 8 + 16 = 28.$

6.1.3.a) Podstaw 3 w miejsce n i zapisz w najprostszej postaci. Następnie podstaw 8 zamiast n .

Odpowiedź: $a_3 = \frac{1}{13}, a_8 = \frac{-1}{28}.$

b) Odpowiedź: $a_3 = \frac{13}{8}, a_8 = \frac{73}{18}.$

c) Odpowiedź: $a_3 = 2\sqrt{7}, a_8 = \sqrt{193}.$

6.1.4. Trzeba obliczyć n . Wstaw zero zamiast a_n i rozwiąż otrzymane równanie.

a) W tym przypadku otrzymujesz równanie kwadratowe o rozwiązaniach (-1) i 12 .

Tylko liczba 12 jest liczbą naturalną dodatnią.

Odpowiedź: Dwunasty wyraz jest równy zero.

b) $\frac{7}{13}n - 84 = 0 \Rightarrow 7n = 1092 \Rightarrow n = 156$

Odpowiedź: Wyraz a_{156} .

6.1.5. W miejsce n podstaw najpierw $n - 1$, potem $2n - 1$ i wreszcie $n + 1$, a następnie przekształć otrzymane wyrażenie do najprostszej postaci. Pamiętaj o kolejności działań.

$$a_{n-1} = 3(n^2 - 2n + 1) - (n - 1) + 4 = 3n^2 - 7n + 8$$

$$a_{2n-1} = 12n^2 - 14n + 8$$

$$a_{n+1} = 3(n^2 + 2n + 1) - (n + 1) + 4 = 3n^2 + 5n + 6$$

6.1.6. Należy rozwiązać nierówność $a_n < 13$.

Odpowiedź: Nierówność spełniają wszystkie wyrazy o numerach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 33, 34\}$.

6.1.7. $a_9 = \frac{3 \cdot 9 - 2}{9^2 + 1} = \frac{25}{82}$

Odpowiedź: A.

6.1.8. Oblicz kolejno pierwsze trzy wyrazy ciągu. Zauważ, że (-1) podniesione do potęgi parzystej jest równe 1 , a do nieparzystej jest równe (-1) .

$$a_1 = 1 + (-1)^2 = 2, a_2 = 1 + (-1)^3 = 0, a_3 = 1 + (-1)^4 = 2$$

Odpowiedź: Suma trzech pierwszych wyrazów tego ciągu jest równa 4 .

6.1.9. Oblicz wyraz piąty, podstawiając w każdym przypadku 5 za n . Otrzymasz:

- A. 21 ; B. 3 ; C. 6 ; D. 8 .

Odpowiedź: D.

6.1.10.

$$\frac{n^2 - 6n - 13}{3} < 1$$

$$n^2 - 6n - 16 < 0$$

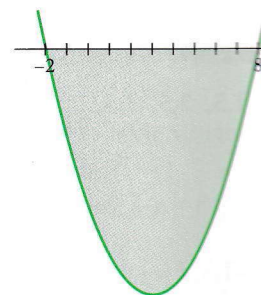
$$x^2 - 6x - 16 < 0, \Delta = 100,$$

$$x_1 = -2, x_2 = 8$$

Przekształć tę nierówność do najprostszej postaci.

Jest to nierówność kwadratowa z niewiadomą n . Najpierw musisz ją rozwiązać w zbiorze liczb rzeczywistych. Przyjmij więc, że x jest liczba rzeczywista.

Wyznacz miejsca zerowe danej funkcji kwadratowej.



$$-2 < x < 8$$

Odpowiedź: Są to wy

6.1.11. Rozważ funkcję

$$x = \frac{-b}{2a}, \text{ gdy jest okres}$$

Jeżeli szukasz najmniejszych wartości funkcji, czyli wartości ciągu, czyli wartości funkcji $f(1)$

$f(n) = a_n$ przyjmuje n

Odpowiedź: Najmnie

6.1.12.

a) $S_n = 2n^2 + 3n \Rightarrow$

b) $S_n = -n^2 + 2n \Rightarrow$

c) $S_n = 4n^2 - 2n \Rightarrow$

d) $S_n = 0,04n^2 + 3,2n$

6.2. Ciągi ar

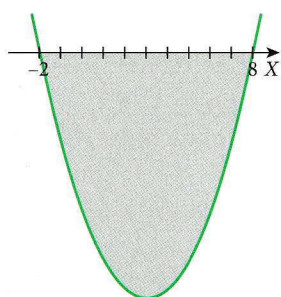
6.2.1. Oblicz cztery

a) $a_1 = 5, r = -1$;

d) $a_1 = 3, r = -2,5$;

g) $a_4 = 7, r = -5$;

j) $a_6 = 12\pi, r = 3\pi$.



$$-2 < x < 8$$

Odpowiedź: Są to wyrazy o numerach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Na podstawie szkicu wykresu funkcji kwadratowej odczytaj rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych. Ze zbioru liczb spełniających nierówność wybierz teraz liczby naturalne.

6.1.11. Rozważ funkcję $f(x) = 2x^2 - 24x + 40$, która przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = \frac{-b}{2a}$, gdy jest określona na zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ i $f(6) = -32$.

Jeżeli szukasz najmniejszej wartości funkcji w przedziale, to musisz sprawdzić także, jakie są wartości funkcji na jego końcach. W tym wypadku szukasz najmniejszej wartości ciągu, czyli funkcji określonej na zbiorze liczb naturalnych dodatnich. Oblicz wartość funkcji $f(1) = 18$. Gdy powrócisz do zbioru liczb naturalnych, to funkcja $f(n) = a_n$ przyjmuje najmniejszą wartość -32 dla $n = 6$.

Odpowiedź: Najmniejszą wartość przyjmuje wyraz szósty.

6.1.12.

a) $S_n = 2n^2 + 3n \Rightarrow S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5, S_3 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 = 27$

b) $S_n = -n^2 + 2n \Rightarrow S_1 = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1, S_3 = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$

c) $S_n = 4n^2 - 2n \Rightarrow S_1 = 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 2, S_3 = 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 30$

d) $S_n = 0,04n^2 + 3,2n \Rightarrow S_1 = 0,04 \cdot 1^2 + 3,2 \cdot 1 = 3,24$ i $S_3 = 0,04 \cdot 3^2 + 3,2 \cdot 3 = 9,96$

6.2. Ciągi arytmetyczne

6.2.1. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, jeśli:

a) $a_1 = 5, r = -1;$

b) $a_1 = 4, r = 3;$

c) $a_1 = 2, r = -0,5;$

d) $a_1 = 3, r = -2,5;$

e) $a_1 = -4, r = 2;$

f) $a_5 = 8, r = 3,1;$

g) $a_4 = 7, r = -5;$

h) $a_2 = 2, r = -\sqrt{2};$

i) $a_3 = -2, r = 2 + \sqrt{3};$

j) $a_6 = 12\pi, r = 3\pi.$